Ueber die Ermittlung

der Masse, des Alters und des Zuwachses

der

Holzbestände.

Von

Dr. Gustav Heyer,

Privatdocenten der Forstwissenschaft an der Ludewigsuniversität zu Gießen.

Mit 19 lithographischen Tafeln.

Dessau 1852.

Druck und Verlag von Moritz Katz (Gebrüder Katz).

Vorwort.

Bei der Ausarbeitung der Vorträge über Waldertragsregelung, welche ich seit mehrern Jahren neben den übrigen Theilen des Forstfachs an der hiesigen Universität docire, machte sich mir der Mangel einer mathematischen Begründung einiger der wichtigsten Vorarbeiten der praktischen Taxation sehr fühlbar. Da in sämmtlichen über diese Disciplin erschienenen Schriften der fragliche Gegenstand außerordentlich vernachlässigt ist, so sah ich mich genöthigt, eigne Untersuchungen anzustellen, deren Resultate ich hiermit der Oeffentlichkeit übergebe. Es ist hauptsächlich die Theorie der Holzmassenaufnahme, der Altersbestimmung und der Zuwachsberechnung, für welche ich eine wissenschaftliche Grundlage zu bilden versucht habe.

Doch darf ich nicht unerwähnt lassen, daß von dem Fürstl. Sigmaringen'schen Hofkammer- und Forstrath Karl eine Arbeit über die Bestimmung des mittlern Alters ungleichaltriger Holzbestände vorliegt. Indessen konnte ich die Entwicklungen (wenn man sie so nennen darf) dieses Schriftstellers, für meinen Zweck fast gar nicht benutzen. Die Untersuchungen Karl's sind nach einer ganz unwissenschaftlichen Methode gemacht; es fehlt seinen Folgerungen durchweg die generelle Gültigkeit, weil den von ihm geführten Beweisen immer nur ein Zahlenbeispiel, aber kein allgemeines Raisonnement zu Grunde liegt.

Zur Abwendung einer falschen Beurtheilung meiner Arbeit muß ich bemerken, daß zwar viele von den in §. 2 angenommenen Combinationen in der Natur nicht vorkommen, daß übrigens deren Behandlung nur zu dem Zweck stattfand, um als Vorbereitung für die praktischen Fälle zu dienen und um den Methoden zur Holzmassenaufnahme eine ganz allgemeine Basis zu geben. Von vorzüglicher Wichtigkeit ist dagegen der in §. 2 unter 7., 9. und 10. betrachtete Fall. Ich habe darin untersucht, unter welchen Umständen die Berechnung des Holzgehaltes eines Bestandes aus dem mit der arithmetisch mittlern Kreisfläche versehenen Stamm richtige Resultate liefert. Die Aufsuchung der Abhängigkeit, in welcher die Reductionszahlen von den Kreisflächen stehen müssen, wenn dieses Resultat das nämliche sein soll, wie das bei der Ermittlung des Holzgehaltes aus Stärkeklassenmodellstämmen erhaltene, hätte wohl auf einem etwas kürzern Wege stattfinden können. Man durfte nur, nachdem einmal die Art der Function für zwei

Stammklassen festgestellt war, sogleich zu dem allgemeinen Nachweis übergehen, daß die Gleichung $y = Y - c + \frac{G}{g} c$ auch für noch so viele Klassen und bei ungleichen Stammzahlen in diesen sich richtig verhalte. In der vorliegenden Schrift ist der Beweis gerade so gegeben, wie er aufgefunden wurde, und ich glaubte um deßwillen den daselbst eingeschlagenen Gang beibehalten zu dürfen, weil ich mich beim Vortrag überzeugte, daß dem Anfänger und insbesondere dem in der Mathematik weniger Geübten auf diese Weise das Verständniß erleichtert wird.

Ich habe in der vorliegenden Abhandlung vermieden, von der Differenzial- und Integralrechnung umfassenden Gebrauch zu machen, obgleich durch Anwendung dieser beiden Theile der höhern Analysis die Beweisführung mehrmals sich hätte abkürzen lassen. Die Vorkenntnisse, welche ich von meinen Lesern voraussetze, beschränken sich im Wesentlichen nur auf die analytische Geometrie. Leider wird noch immer das Studium der höhern Mathematik von den Forstleuten sehr vernachlässigt. Wann wird man endlich einmal dahin kommen, einzusehen, daß die Waldertragsregelung, die Waldwerthrechnung und die Statik ihre wissenschaftliche Begründung erst durch die Mathematik erhalten können? Mit der Kenntniß der vier Species ist es hier nicht gethan, und die Zeiten, in denen man dasjenige, was in König's Forstmathematik steht, als ausreichend für den Forstmann betrachten konnte, sind vorüber. Die Waldertragsregelung und die Waldwerthrechnung sind der Hauptsache nach nur Theile der angewandten Mathematik; aber wie kann man die Mathematik anwenden, wenn man dieselbe nicht hinlänglich versteht?

Doch mit allen Ausführungen über den Nutzen der Mathematik erwirbt man dieser nicht leicht einen größern Kreis von Freunden unter den Forstleuten. Die Mathematik wird nur dann allgemeinere Aufnahme finden, wenn ihre Resultate integrirende Bestandtheile unseres Fachs geworden sind. Sollten die in meiner Schrift enthaltenen Entwicklungen hierzu beitragen, so würde ich den Zweck, den ich bei Veröffentlichung der letztern im Auge hatte, erreicht haben.

Schließlich erfülle ich noch die angenehme Pflicht, dem Herrn Theodor Heyer von Biebesheim, welcher mich bei der Berechnung der Ertragsversuche und dem Auftragen der auf den letzten sechszehn Tafeln befindlichen Curven thätig unterstützte, meinen Dank abzustatten.

Gießen, im April 1852.

Gustav Heyer.

Inhalt.

III. Die Zuwachsberechnung.

Anhang.

Ueber Holzmassenaufnahme.

Ueber die Ermittlung

der Masse, des Alters und des Zuwachses der Holzbestände.

I.

Ueber Holzmassenaufnahme.

---

§. 1.

Wenn die Waldbäume eine bestimmte stereometrische Form besäßen und uns das Gesetz dieser Form bekannt wäre, so brauchten wir nur die Höhe eines Stammes zu wissen, um seine Masse zu erfahren*). Denn der Inhalt jeder nach einem constanten Gesetz gebildeten stereometrischen Figur läßt sich durch Integration der Differenzialgleichung für die Cubatur finden; um den Inhalt eines concreten Körpers bestimmen zu können, müssen nun nur noch die Grenzen gegeben sein, innerhalb welcher das Integral zu nehmen ist. Bezeichnet man die Höhe h des Baumes mit x, so hat man die Grenzen $x = 0$; dieser Punkt ist die Spitze des Baumes, und $x = h$.

Wäre die Baumkörperform eine nach irgend einem Gesetz gebildete, aber dies Gesetz selbst uns unbekannt, so müßten so viele Querschnitte des Baumes mit ihren Abständen vom Wur=

---

*) Wir setzen natürlich voraus, daß nicht blos die allgemeine Gleichung der Baumkörperform, sondern auch die in derselben enthaltenen Constanten gegeben seien.

zelstock oder der Spitze gegeben sein, als Constanten in der Gleichung enthalten sind, nach welcher die Oberfläche des Baumkörpers läuft.

Alle Erfahrungen, welche man bei der Messung von Bäumen gesammelt hat, sprechen dafür, daß die Baumformen keinem uns bekannten Gesetze folgen. Da man aber kleinere Stücke, in welche der Stamm zerlegt wird, annäherungsweise als regelmäßige Körper ansehen kann, so ist uns doch, und zwar in der Sectionsvermessung, ein Mittel geboten, um dem wahren Bauminhalte i so nahe zu kommen, als wir nur wollen.

Hat man nach diesem Verfahren i gefunden, so läßt sich dieses durch die Höhe und Stärke des Baumes ausdrücken. Man denkt sich nämlich, i sei ein aliquoter Theil des Cylinders, Kegels oder irgend eines andern Umdrehungs-Körpers, welcher sich auf die Kreisfläche g mit der Höhe h construiren läßt.

Für den Cylinder ist . . $i = gh \cdot R$,

für den gemein. Kegel ist $i = \frac{gh}{3} \cdot R'$,

für den parabol. Kegel ist $i = \frac{gh}{2} \cdot R''$.

Den Coefficienten R, R′, R″ . . . ., mit welchem man den körperlichen Inhalt einer angenommenen Idealform multiplizieren muß, um den wahren Bauminhalt i zu bekommen, nennt man gemeinhin die Reductionszahl.

Diese wird für jeden Baum gefunden, indem man seine Kreisfläche und seine Höhe mißt und hierauf den wirklichen Bauminhalt ermittelt*). Es ist

---

*) Bekanntlich nennt man das Verhältniß des Schaftholzgehaltes zum Cylinder „Schaftwalzensatz", während das Verhältniß des ganzen Bauminhaltes (mit Wurzeln und Aesten) zu dem nämlichen mathematischen Körper mit „Baumwalzensatz" bezeichnet wird.

$$gh\,R = i, \text{ also } R = \frac{i}{gh};$$

$$\frac{gh}{3}\,R' = i, \text{ also } R' = \frac{3i}{gh};$$

$$\frac{gh}{2}\,R'' = i, \text{ also } R'' = \frac{2i}{gh} \text{ und so fort.}$$

Wäre uns also die Reductionszahl bekannt, so brauchten wir nur die Diameter oder Umfänge und die Höhen der Stämme zu messen, um daraus den wahren Inhalt derselben abzuleiten.

Wie bemerkt, ist R nicht constant, sondern für fast jeden Stamm verschieden. Hat man die Reductionszahlen einer größern Anzahl von Stämmen berechnet und im Einschätzen der Vollholzigkeit sich geübt, so kann man i, jedoch nicht absolut genau, finden, wenn man g und h mißt, aber R bloß taxirt. Da, den bestehenden Erfahrungen zufolge, die wahren Schaftinhalt von weniger als $\frac{1}{3}$ bis zu mehr als $\frac{2}{3}$ des Productes gh gehen können, so ist es einerlei, ob die Reductionszahl auf den Cylinder oder den gemeinen Kegel bezogen wird.

Den parabolischen Kegel als Idealform anzunehmen, empfiehlt sich nicht, weil wir für diese krummlinig begrenzte Figur keinen rechten Anhaltspunkt in unserm Augenmaß besitzen.

König hat in Vorschlag gebracht, die Bauminhalte dadurch abzuschätzen, daß man sich einen Cylinder denkt, welcher den Inhalt des Baumes besitzt und mit diesem die Basis g gemein hat. Natürlich kann dann die Höhe h' dieses Cylinders*) nicht dieselbe sein, als die Höhe h des Baumes.

Es ist

$$i = gh', \; h' = \frac{i}{g}$$

*) h' wird von König die „Richthöhe" genannt.

Zu Taxationen der Bauminhalte möchte dieses Verfahren sich weniger, als das oben angegebene eignen, weil die wirkliche Höhe h des Baumes verändert wird und ein neuer Körper gh′ gedacht werden muß, dessen Form, abgesehen von der Grundfläche, nicht die geringste Uebereinstimmung mit derjenigen unseres Baumes besitzt.

Halten wir indessen die Bedeutung des Ausdrucks $\frac{i}{g}$ fest; wir werden späterhin von demselben Gebrauch machen.

§. 2.

Die Factoren des Holzmassengehaltes eines Bestandes sind:

1. die Stärke (Durchmesser d, Umfang u oder Kreisfläche g),
2. die Höhe h,
3. die Reductionszahl R eines jeden Stammes.

Diejenigen Bäume, welche einen oder mehrere dieser Factoren gleich haben, können in eine Klasse vereinigt werden. Die Stammzahlen a, a′, a″ .... der einzelnen Klassen sind als vierter Factor zu notiren.

In dem eben gedachten Falle kann das Verfahren zur Holzmassenaufnahme wesentliche Abkürzungen erleiden. Diese treten aber schon dann ein, wenn einer der drei Factoren eine Function des andern ist, d. h. wenn er in einem bestimmten Abhängigkeitsverhältniß zu diesem steht*).

Es können nun die Factoren einer Gattung entweder

1. constant, oder
2. verschieden und eine Function eines jeden der andern,
3. verschieden und eine Function der zwei andern Factoren, oder
4. ohne Regelmäßigkeit verschieden sein.

---

*) So ist z. B. die Höhe der Stämme dann eine Function der Stärke oder der Querfläche, wenn bei Zunahme dieser auch die Höhe, gleichviel nach welchem Gesetze, wächst.

a) Wenn der Fall, daß ein Factor eine Function eines andern ist, bereits da war, so ist der Fall, daß der zweite Factor eine Function des ersteren ist, derselbe, und braucht nicht besonders betrachtet zu werden. Es ist also nur h = f (g), R = f (g), R = f (h) in's Auge zu fassen und nicht auch g = f (h), g = f (R), h = f (R).

b) Ebenso sind, wenn ein Factor eine Function der beiden andern ist, alle drei von einander abhängig und zwei gegebene bestimmen den dritten; es brauchen dann die Fälle, in denen der zweite Factor eine Function des ersten und dritten oder der dritte eine Function des ersten und zweiten ist, nicht nochmals aufgeführt zu werden, weil sie mit dem Fall, daß der erste eine Function des zweiten und dritten ist, übereinstimmen. Ist also R = f (g, h), so hat man auch g = f (R, h) und h = f (g, R) berücksichtigt.

c) Wenn ferner der zweite und dritte Factor eine Function des ersten ist, so sind durch einen von denselben, welcher gegeben ist, die zwei andern bestimmt und die Fälle, daß der erste und dritte eine Function des zweiten und daß der erste und zweite eine Function des dritten ist, brauchen, als mit dem ersten übereinstimmend, nicht weiter in Betracht genommen zu werden. Wir haben es daher, wenn h = f (g) und zugleich R = f (g) ist, nur mit diesen beiden und nicht auch mit g = f (h), R = f (h) und g = f (R), h = f (R) zu thun.

Folgende Fälle können nun unterschieden werden.

I. g constant.

A. h constant.

1. R constant.

R = f (g); fällt zusammen mit 1.)

R = f (h) . . . . . . = 1.)

R = f (g,h) . . . . . . = 1.)

2. R verschieden ohne Regelmäßigkeit.

B. h = f (g) . . . . = A.)

C. h = f (R) . . = den Fällen, in denen R = f (h) ist.

D. h = f (g,R) . . = den Fällen, in denen R = f (g,h) ist.

E. h verschieden ohne Regelmäßigkeit.

3. R constant.

R = f (g) . . . . = 3.)

4. R = f (h) . . . .

R = f (g,h) . . . . = 4.)

5. R verschieden ohne Regelmäßigkeit.

II. g = f (h) . . . . = den Fällen, in denen h = f (g) ist.

III. g = f (R) . . . . = den Fällen, in denen R = f (g) ist.

IV. g = f (h,R) . . . = den Fällen, in denen R = f (g,h) ist.

V. g verschieden ohne Regelmäßigkeit.

F. h constant.

6. R constant.

7. R = f (g)

R = f (h) . . . . = 6.)

R = f (g,h) . . . . . . = 7.)

8. R verschieden ohne Regelmäßigkeit.

G. h = f (g)

9. R constant.

10. R = f (g)

R = f (h) . . . . = 10.)

R = f (g,h) . . . . . . = 10.)

11. R verschieden.

H. h = f (R) . . . = den Fällen, in denen R = f (h) ist.

J. h = f (g,R) . . . = den Fällen, in denen R = f (g,h) ist.

K. h verschieden ohne Regelmäßigkeit.

12. R constant.

13. R = f (g)

14. R = f (h)

15. $R = f(g,h)$

16. R verschieden.

Die Mittel zur genauesten Holzmassenaufnahme sind nun für diese verschiedenen Fälle folgende:

Fall I. A., 1. Alle Stämme besitzen gleiche Stärke, gleiche Höhe und gleiche Reductionszahl.

In diesem Fall, der übrigens in der Praxis nicht leicht vorkommen wird, erfährt man die Holzmasse des ganzen Bestandes vollkommen genau, wenn man die in demselben befindlichen Stämme zählt und einen einzigen Stamm kubisch vermißt. Sein Inhalt i, multiplizirt durch die Anzahl A sämmtlicher Stämme, gibt die gesuchte Holzmasse J. Es ist also $i . A = J$.

Fall I. A., 2. Alle Stämme besitzen gleiche Stärke, gleiche Höhe, aber verschiedene Reductionszahlen. Letztere sind keine Functionen der Stärke oder der Höhe oder beider zugleich.

Jeder Stamm muß kubisch vermessen werden.

Fall I. E., 3. Stärke und Reductionszahl constant, Höhe unregelmäßig verschieden.

Hier läßt sich ein einziger (Modell-) Stamm denken, dessen Inhalt, multiplizirt mit der Anzahl sämmtlicher Stämme, gleich der Summe der Inhalte dieser letztern ist. Da die Stärke und Reductionszahl dieses Stammes gegeben sind, so haben wir uns nur noch über seine Höhe $\mathfrak{h}$ zu verlässigen. Diese finden wir durch die Gleichung:

$$ghR . a + gh'R . a' + gh''R . a'' + \ldots = (a + a' + a'' + \ldots) g\mathfrak{h}R,$$

(indem man nämlich alle Stämme mit gleichen Höhen in eine Klasse bringt).

Hieraus folgt, da gR als gemeinschaftlicher Factor jedes Theilsatzes sich streicht,

$$ah + a'h' + a''h'' + \ldots = (a + a' + a'' + \ldots)\mathfrak{h};$$

$$\mathfrak{h} = \frac{ah + a'h' + a''h'' + \ldots}{a + a' + a'' + \ldots}$$

Der mit der arithmetisch mittlern Höhe $\mathfrak{h}$ versehene Stamm ist also das wahre Mittel aus den Inhalten sämmtlicher Stämme.

Fall I. E.), 4.) Stärke constant, Höhe verschieden, Reductionszahl eine Function der Höhe.

Es sei $R = f(h)$, $R' = f(h')$, $R'' = f(h'')$.... $\mathfrak{R} = f(\mathfrak{h})$, wobei $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{h}$ die Reductionszahl und Höhe eines mittlern Modellstammes bezeichnen, so hat man

$$aghf(h) + a'gh'f(h') + a''gh''f(h'') + \ldots$$
$$= (a + a' + a'' + \ldots) g\mathfrak{h}f(\mathfrak{R}); \text{ oder}$$
$$ahf(h) + a'h'f(h') + a''h''f(h'') + \ldots = (a + a' + a'' + \ldots)\mathfrak{h}f(\mathfrak{h}).$$

Ist die Art der Function bekannt, so läßt sich $\mathfrak{h}$ aus dieser Gleichung bestimmen.

Es sei z. B. $f(h) = qh, f(h') = qh' \ldots\ldots f(\mathfrak{h}) = q\mathfrak{h}$, so ist

$$aqh^2 + a'qh'^2 + a''qh''^2 + \ldots = (a + a' + a'' + \ldots)q\mathfrak{h}^2;$$

$$\mathfrak{h}^2 = \frac{aqh^2 + a'qh'^2 + a''qh''^2 + \ldots}{q(a + a' + a'' + \ldots)}$$

Ist uns $R = f(h)$ nicht bekannt, so können wir es ermitteln, indem wir Stämme fällen lassen und deren Höhe und Vollholzigkeit aufsuchen. Kürzer kommen wir indessen zum Ziele durch Bildung von Höheklassen. Aus jeder derselben wird ein Stamm gefällt und vermessen. Sein Inhalt, multiplizirt mit der Anzahl der in der Klasse befindlichen Stämme, gibt den Massegehalt der Klasse. Aus der Summe der Klassenmassen setzt sich die Masse des Bestandes zusammen.

Nimmt man aus den Höhen aller Stämme das arithmetische Mittel, so ist der mit dieser mittlern Höhe versehene Stamm dann das wahre Modell aller Bäume des Bestandes, wenn die Reductionszahlen in einer solchen Abhängigkeit von der Höhe sich befinden, daß die Gleichung

$$r = R - c + \frac{H}{h} c$$

besteht, in welcher r, R zwei Reductionszahlen, h, H die Höhen der mit diesen Reductionszahlen behafteten Stämme, c eine durch die Beobachtung zu bestimmende Constante bedeutet. Den mutatis mutandis geführten Beweis*) für diesen Satz siehe unter Fall V. F., 7.

Fall I. E., 5. Stärke constant, Höhe und Reductionszahl ohne Regelmäßigkeit verschieden.

Es sei h die Höhe, R die Reductionszahl des Modellstamms, A die Anzahl sämmtlicher Stämme, so hat man

$$hR + h'R' + h''R'' + \ldots\ldots = A\mathfrak{h}\mathfrak{R}.$$

Aus dieser Gleichung lassen sich die Dimensionen des Modellstamms nicht auffinden. Es bleibt daher, da auch innerhalb jeder Höhenklasse, wenn man eine solche bilden wollte, verschiedene Vollholzigkeiten herrschen, nichts übrig, als jeden Stamm kubisch zu vermessen.

Fall V. F., 6. Alle Stämme besitzen gleiche Höhe und gleiche Reductionszahl. Die Stärken dagegen sind verschieden.

Man ermittelt die Kreisflächensumme aller Stämme. Dazu bringt man diese in Klassen nach Stärken (am bequemsten nach Durchmessern), multiplizirt die Kreisfläche eines Stammes jeder Klasse mit der Anzahl der in der Klasse befindlichen Stämme und addirt die Produkte. Sodann bestimmt man die Höhe und Reductionszahl an nur einem einzigen Stamme. Hierzu eignet sich jeder Baum im Bestande, gleichviel, ob er dick oder dünn ist.

*) Wir liefern diesen Beweis um deßwillen nicht hier, sondern erst unter Fall 7., weil die im Fall 4. enthaltene Annahme, daß die Stärken aller Stämme die nämlichen seien, eine unpraktische ist.

Sind r, r′, r″.... die Halbmesser der Stärkeklassen,
a, a′, a″.... die Stammzahlen "
ist h die gemeinschaftliche Höhe,
R die gemeinschaftliche Reductionszahl aller Stämme,
so ist

$$\pi r^2 hR . a + \pi r'^2 hR . a' + \pi r''^2 hR . a'' + \ldots . = J,$$

wobei J den Massengehalt des ganzen Bestandes bedeutet.

Es ist, wenn man πr^2, $\pi r'^2$, $\pi r''^2$.... mit g, g′, g″.... bezeichnet,

$$hR (ga + g'a' + g''a'' + \ldots .) = J.$$

Ist i der durch genaue Vermessung gefundene wahre Inhalt irgend eines Baumes, γ seine Kreisfläche, h seine Höhe, so hat man

$$\gamma h . R = i, \; R = \frac{i}{\gamma h} \text{ und}$$

$$J = h . \frac{i}{\gamma h} (ga + g'a' + g''a'' + \ldots .)$$

$$= \frac{i}{\gamma} (ga + g'a' + g''a'' + \ldots .), \text{ oder}$$

$$\frac{i}{J} = \frac{\gamma}{ga + g'a' + g''a'' + \ldots .}$$

das heißt: der Inhalt eines Stammes verhält sich zum Inhalt aller Stämme, wie sich seine Kreisfläche zur Kreisflächensumme aller Stämme verhält.

Diese Regel findet Anwendung bei der Auswahl der Modellstämme. Man sucht bekanntlich diese so viel als möglich von den durch die Rechnung sich ergebenden Dimensionen zu erhalten. Nicht immer finden sich indessen im Walde Stämme vor, welche diese Dimensionen besitzen. Man muß sich daher öfters mit einem etwas schwächern oder stärkern Stamme begnügen. Aus einem solchen Baum läßt sich also der Massengehalt sowohl des

wahren Modellstammes, als des ganzen Bestandes nach obiger Gleichung bestimmen. Es ist aber dabei vorausgesetzt, daß allen Stämmen gleiche Höhe und Vollholzigkeit zukomme.

Fall V. F., 7. Höhe aller Stämme die nämliche, Stärke verschieden, Reductionszahl eine Function der Stärke.

Hier läßt sich das in Fall V. F., 6. angegebene Verfahren nicht anwenden. Offenbar erhält man unter den vorliegenden Bedingungen den Massengehalt des Bestandes ganz genau, wenn man jeden Stamm kubisch vermißt. Es fragt sich aber, ob nicht eine abkürzende Methode existire.

Da, zufolge unserer Annahme, alle diejenigen Stämme, welche gleichen Querschnitt besitzen, auch die nämliche Reductionszahl haben, so ist schon darin eine Abkürzung gefunden, daß man aus jeder Stärkeklasse einen Stamm auf seinen Inhalt untersucht, diesen mit der Anzahl der in der Klasse enthaltenen Stämme multiplizirt und die Produkte addirt. Also

$$ia + i'a' + i''a'' + \ldots = J.$$

Es entsteht aber die weitere Frage, ob nicht ein Modellstamm sich bestimmen lasse, dessen Cubikinhalt das Mittel aus den Inhalten aller Stämme ist, so daß der Massengehalt des ganzen Waldes sich ergäbe, wenn man den Inhalt dieses Modellstammes mit der Anzahl sämmtlicher Stämme des ganzen Bestandes multiplizirte. Fände sich ein solcher Stamm, so würde das Verfahren der Holzmassenaufnahme sehr erleichtert sein, weil man hier blos einen Rechnungsansatz erhielte, während sonst so viele Ansätze gemacht werden müssen, als Klassen vorhanden sind.

Ist h die gemeinschaftliche Höhe aller Stämme und sind R, R′, R″.... die Reductionszahlen der Stärkeklassen, so ist

$$J = \pi r^2 hR \,.\, a + \pi r'^2 hR' \,.\, a' + \pi r''^2 hR'' \,.\, a'' + \ldots$$

Der Halbmesser des zu suchenden Modellstammes sei $= r$, seine Reductionszahl $= \mathfrak{R}$, so ist, wenn $a + a' + a'' + \ldots\ldots = A$,

$$\pi r^2 h \,.\, \mathfrak{R} \,.\, A = \pi r^2 hR \,.\, a + \pi r'^2 hR' \,.\, a' + \pi r''^2 hR'' \,.\, a'' + \ldots\ldots$$

Ist, wie angenommen, die Reductionszahl eine Function der Stärke, also

$R = f(r)$, $R' = f(r')$, $R'' = f(r'')$ .... und demnach auch $\mathfrak{R} = f(r)$, so hat man

$$\pi r^2 hf(r) \,.\, A = \pi r^2 hR \,.\, a + \pi r'^2 hR' \,.\, a' + \pi r''^2 hR'' \,.\, a'' + \ldots\ldots$$

oder

$$\pi r^2 f(r) A = \pi r^2 R \,.\, a + \pi r'^2 R' \,.\, a' + \pi r''^2 R'' \,.\, a'' + \ldots\ldots$$

Aus dieser Gleichung läßt sich, wenn die Art der Function bekannt ist, r bestimmen. Der dazu gehörende, im Bestand befindliche, Baum ist das wahre Modell aller Stämme.

Nehmen wir beispielsweise an, $f(r)$ sei $= q\sqrt{r}$ (wobei unterstellt wird, die Reductionszahlen wüchsen wie die Ordinaten einer apollonischen Parabel, wenn die Durchmesser wie deren Absciſſen zunehmen), so ist

$$\pi r^2 q\sqrt{r} \,.\, A = \pi r^2 R \,.\, a + \pi r'^2 R' \,.\, a' + \pi r''^2 R'' \,.\, a'' + \ldots\ldots$$

$$q r^{5/2} \,.\, A = r^2 R \,.\, a + r'^2 R' \,.\, a' + r''^2 R'' \,.\, a'' + \ldots\ldots$$

$$r^{5/2} = \frac{r^2 R \,.\, a + r'^2 R' \,.\, a' + r''^2 R'' \,.\, a'' + \ldots\ldots}{qA}$$

$$r = \left(\frac{r^2 R \,.\, a + r'^2 R' \,.\, a' + r''^2 R'' \,.\, a'' + \ldots\ldots}{qA}\right)^{2/5}$$

Das Gesetz, nach welchem die Vollholzigkeit von der Stärke abhängig ist, kennen wir nun bis jetzt nicht. Wir wissen aber, daß es nach Holzart, Alter, Boden, Lage, Klima und Waldbehandlungsart verschieden ist. Man könnte nun zwar die Art der Function für einen gegebenen Bestand ermitteln, allein dazu gehört, daß Stämme von jeder Stärke kubisch vermessen werden.

Wollte man in dieser Weise verfahren und also nach Ausmittlung der Function den Modellstamm suchen, so würde man offenbar einen Umweg gehen, denn, wenn einmal Stämme zu dem angegebenen Zweck gefällt und vermessen werden sollen, so wählt man ebenso gut Klassenstämme aus und bestimmt aus diesen unmittelbar den Inhalt der Klasse.

Wären die Reductionszahlen der einzelnen Stämme nicht verschieden, so ergäbe sich des mittlern Modellstammes Kreisfläche g′ durch die Gleichung

$$g' = \frac{ga + g'a' + g''a'' + \ldots .}{a + a' + a'' + \ldots .} = \frac{ga + g'a' + g''a'' + \ldots .}{A}$$

Diese Formel leitet sich ja aus der Gleichung

$$\pi r^2 hR \,.\, A = \pi r^2 hR \,.\, a + \pi r'^2 hR \,.\, a' + \pi r''^2 hR \,.\, a'' + \ldots .$$

dadurch her, daß R auf beiden Seiten als Factor jedes Gliedes ausfällt.

Ist aber R nicht gemeinschaftlich, so entsteht die neue Frage, ob nicht die Function von der Art sein kann, daß, trotz der Ungleichheit der Reductionszahlen, der nach der arithmetisch mittlern Kreisfläche g′ bestimmte Stamm zugleich das wahre Modell aller Stämme, d. h. in Bezug auf ihre Holzmenge, ist.

Es kann ja immerhin, läßt sich vermuthen, die Reductionszahl eine solche Function der Kreisfläche sein, daß aus dem Zusammenwirken der einzelnen R, R′, R″.... ein solcher Stamm als wahrer Modellstamm sich ergibt, dessen Inhalt, multiplizirt mit der Gesammtstammzahl, den wahren Inhalt aller Stämme liefert und dessen Kreisfläche g mit der arithmetisch mittlern g′ übereinstimmt. Natürlich muß auch seine Reductionszahl ℜ dieselbe Function von g = g′ sein, wie R von g u. s. w.

Wir haben nun auszumitteln, welcher Art die Function für diesen Fall sein müsse.

Wenn $R = f(g)$, $R' = f(g')$, $R'' = f(g'')$...., $\mathfrak{R} = f(\mathfrak{g})$ ist, so besteht, wie wir gesehen haben, die Gleichung

$$agf(g) + a'g'f(g') + a''g''f(g'') + ... = (a + a' + a'' + ...)\mathfrak{g}f(\mathfrak{g} .... (1)$$

wobei vorerst noch nicht entschieden werden kann, ob $\mathfrak{g}$ die arithmetisch mittlere oder eine andere, größere oder kleinere Kreisfläche bedeutet.

Für die arithmetisch mittlere Kreisfläche $\mathfrak{g}'$ besteht die Gleichung

$$ag + a'g' + a''g'' + ... = (a + a' + a'' + ...)\mathfrak{g}' \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (2)$$

Aus der Gleichung (1) läßt sich die Kreisfläche $\mathfrak{g}$ des wahren Modellstamms finden, wie auch die Function $\mathfrak{R} = f(\mathfrak{g})$ beschaffen sein möge. Je nach ihrer Art wird sich ein anderes $\mathfrak{g}$ ergeben. Soll aber vorausbestimmt sein, daß $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}'$, d. h., daß die Kreisfläche $\mathfrak{g}$ des wahren Modellstamms gleich der arithmetisch mittlern werden soll, so daß die Gleichung

$$agf(g) + a'g'f(g') + a''g''f(g'') + ... = (a + a' + a'' + ...)\mathfrak{g}'f(\mathfrak{g}')$$

besteht, so muß umgekehrt die Art der Function eine ganz bestimmte sein. Wir wollen sie jetzt aufsuchen.

Zu diesem Zweck nehmen wir vorerst als einfachsten Fall an, es existirten nur zwei Klassen und es sei $a = a'$. Dann ist

$$agf(g) + ag'f(g') = 2a\mathfrak{g}f(\mathfrak{g}) \text{ oder}$$

$$gf(g) + g'f(g') = 2\mathfrak{g}f(\mathfrak{g}) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; [(1)]$$

Ferner ist für die arithmetisch mittlere Kreisfläche $\mathfrak{g}'$

$$ag + ag' = 2a\mathfrak{g}' \text{ oder}$$

$$g + g' = 2\mathfrak{g}' \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; [(2)]$$

und es ist nun $f(g)$ so zu bestimmen, daß $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}'$ wird.

Es seien jetzt g, g' die Abscissen und $f(g)$, $f(g')$ die Or=

dinaten einer Curve, so ist $gf(g)$ der Inhalt des aus Abscisse und zugehöriger Ordinate gebildeten Rechtecks und es ist (Taf. I., Fig. 1)

$$Og = g,\ gy = f(g) = y \text{ und}$$

$$gf(g) + g'f(g') = \square\, Ogyn + \square\, Og'y'n'$$

Nun muß $\mathfrak{g} = O\mathfrak{g}$ so gesucht werden, daß nach Gleichung [(1)]

$$\square\, O\mathfrak{g}\mathfrak{y}n = \tfrac{1}{2}\,[\square\, Ogyn + Og'y'n']\ \text{ist,}$$

was bei stetiger Function stets geschehen kann. Soll nun auch $\mathfrak{g} = g'$ sein, so muß nach Gleichung [(2)]

$\mathfrak{g} = \tfrac{1}{2}(g + g')$ stattfinden, woraus, da $\square\, O\mathfrak{g}\mathfrak{y}n = \mathfrak{g}\mathfrak{y}$, $\square\, Ogyn = gy$ und $\square\, Og'y'n' = g'y'$, also $\mathfrak{g}\mathfrak{y} = \tfrac{1}{2}(gy + g'y')$,

$$\mathfrak{y} = \frac{\tfrac{1}{2}(gy + g'y')}{\tfrac{1}{2}(g + g')} \text{ folgt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad [(3)]$$

Es sei nun für irgend einen Werth von g', zum Beispiel für $g' = G,\ y' = Y$ bekannt.

Setzen wir

$$g = 0, \text{ so wird}$$

$$\mathfrak{g} = \tfrac{1}{2}G,\ \mathfrak{y} = \frac{\tfrac{1}{2}(0 \,.\, y + G \,.\, Y)}{\tfrac{1}{2}G}$$

Nimmt man

1.* an, daß $0 \,.\, y = 0$ sei, so ergibt sich

1. für $\mathfrak{g} = \tfrac{1}{2}G,\ \mathfrak{y} = \dfrac{\tfrac{1}{2}GY}{\tfrac{1}{2}G} = Y$

   und, da g und y dieselben Functionen von einander sind, auch für $g = \tfrac{1}{2}G,\ y = Y$.

2. Wir wissen nun zwei Werthe von y, nämlich die zu $g' = G$ und $g = \tfrac{1}{2}G$ gehörigen $y' = Y$ und $y = Y$. Setzen wir in [(3)]

   $g' = G,\ y' = Y,\ g = \tfrac{1}{2}G,\ y = Y$, so wird

   $\mathfrak{g} = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}G + G) = \tfrac{3}{4}G$ und

$$\mathfrak{y} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}GY + GY)}{\frac{3}{4}G} = Y;$$

es ist also auch für $g = \frac{3}{4}G$, $y = Y$.

3. Setzen wir $g = \frac{1}{2}G$, $y = Y$, $\mathfrak{g} = G$, $\mathfrak{y} = Y$, so ist $g' = 2\mathfrak{g} - g = 2G - \frac{1}{2}G = \frac{3}{2}G$ und

$$y' = \frac{2\mathfrak{g}\mathfrak{y} - gy}{g'} = \frac{2GY - \frac{1}{2}GY}{\frac{3}{2}G} = Y$$

4. Allgemein; hat man g und g′ gegeben und $y = y' = Y$, so muß stets, wenn $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{y}$ berechnet werden, $\mathfrak{y} = Y$ gefunden werden, denn es ist ja

$$\mathfrak{g} = \frac{1}{2}(g + g'),\ \mathfrak{y} = \frac{\frac{1}{2}(gy + g'y')}{\mathfrak{g}} = \frac{\frac{1}{2}(g + g')Y}{\frac{1}{2}(g + g')} = Y.$$

5. Bestimmt man dagegen g′ aus g und $\mathfrak{g}$, und ist $g' > g$ und $g' > \mathfrak{g}$, so muß, wenn $y = \mathfrak{y} = Y$ war, auch $y' = Y$ werden. Denn es ist

$$g' = 2\mathfrak{g} - g,\ y' = \frac{2\mathfrak{g}\mathfrak{y} - gy}{g'} = \frac{(2\mathfrak{g} - g)Y}{2\mathfrak{g} - g} = Y.$$

6. In 1., 2. und 3. haben wir dreimal $f(g) = Y$ constant gefunden; aus 4. und 5. folgt, daß, wenn wir f (g) für stets neue Werthe von g berechnen, indem wir uns auf die vorher bekannten Werthe von $y = Y$ stützen, wir stets denselben Werth $y = Y$ erhalten. Dieses $y = Y$ muß aber für jeden beliebigen Werth von g gelten, denn wir können durch passende Einschaltungen entweder direct auf diesen Werth von g kommen, oder doch uns ihm so weit nähern, als wir nur wollen, ohne daß jemals y nicht $= Y$ wäre. Sind aber zwei unendlich naheliegenden Werthe von $y = Y$, so muß nach dem Gesetz der Continuität der Werth von y an der fraglichen Stelle selbst $= Y$ sein.

Das **Resultat** dieser Entwicklung läuft also auf folgenden Satz hinaus:

Soll der nach der arithmetisch mittlern Kreisfläche bestimmte Modellstamm auch hinsichtlich seines Holzgehaltes das wahre Mittel aus allen Stämmen bilden, so muß die Art der Function so sein, daß $f(g) = f(g') = f(\mathfrak{g}) =$ constant wird; d. h. die Reductionszahl muß für alle Querschnitte dieselbe sein, wie wir auch bereits auf einem andern Wege gefunden hatten. Denn für $R = R' = R'' = \ldots = \mathfrak{R}$ ergab sich

$$\frac{agR + a'g'R + a''g''R + \ldots}{(a + a' + a'' + \ldots)\mathfrak{R}} = \frac{ag + a'g' + a''g'' + \ldots}{a + a' + a'' + \ldots} = \mathfrak{g}' = \mathfrak{g}.$$

Wir hatten vorhin angenommen, es sei $0 . y = 0$. Allein es kann auch für $g = 0$, $y = \infty$ werden. Es ist dann

2.* $gy = 0 . \infty = cG$ eine constante Zahl, d. h. je mehr g der Grenze 0 sich nähert, um so größer wird y und gy nähert sich dann dem Grenzwerthe cG. Dieser Grenzwerth ist durch das Product cG, worin G eine Kreisfläche vorstellt, für welche $f(G) = Y$ bekannt ist, ausgedrückt. Es entstehen hierdurch einfachere Beziehungen, wie die folgende Entwicklung lehren wird. Es ist also aus Gleichung [(3)], wenn wir mehrere Zahlenwerthe der Function bestimmen wollen,

1. $\mathfrak{g} = \frac{1}{2}G$, $\mathfrak{y} = \frac{cG + GY}{G} = \frac{(c+Y)G}{G} = c + Y$ (Taf. I., Fig. 2).

2. für $g = \frac{1}{2}G$ ist $y = Y + c$, da $g = \mathfrak{g}$ und $y = \mathfrak{y}$ sein kann und für $g' = G$ und $y' = Y$,

$$\mathfrak{g} = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}G + G) = \tfrac{3}{4}G,$$

$$\mathfrak{y} = \frac{\frac{1}{2}[\frac{1}{2}G(Y + c) + GY]}{\frac{1}{2}[\frac{1}{2}G + G]}$$

$$= \frac{(\frac{1}{2}G + G)Y + \frac{1}{2}Gc}{\frac{1}{2}G + G}$$

$$= \frac{{}^3/_2 GY + {}^1/_2 Gc}{{}^3/_2 G}$$

$$= \frac{{}^3/_2 Y + {}^1/_2 c}{{}^3/_2} = Y + {}^1/_3 c$$

3. für $g = 0$, $y = \infty$ ist, wie angenommen, $gy = cG$ und für $g' = {}^1/_2\, G$, $y' = Y + c$ ergibt sich

$$\mathfrak{g} = {}^1/_2\,(0 + {}^1/_2 G) = {}^1/_4 G,$$

$$\mathfrak{y} = \frac{cG + (Y + c)\,{}^1/_2 G}{0 + {}^1/_2 G} = \frac{G\,({}^1/_2 Y + {}^3/_2 c)}{{}^1/_2 G} = Y + 3c$$

4. für $g = 0$, $y = \infty$, $gy = cG$ und $\mathfrak{g} = G$, $\mathfrak{y} = Y$ wird

$$g' = 2G,\ y' = \frac{2GY - cG}{g'} = \frac{2GY - cG}{2G} = Y - \frac{c}{2}$$

5. für $g = 0$, $y = \infty$, $gy = cG$ und $\mathfrak{g} = 2G$, $\mathfrak{y} = Y - \frac{c}{2}$ wird

$$g' = 4G,\ y' = \frac{4G\left(Y - \frac{c}{2}\right) - cG}{4G}$$

$$= Y - \frac{c}{2} - \frac{c}{4} = Y - {}^3/_4 c$$

6. für $g = 0$, $y = \infty$, $gy = cG$, $\mathfrak{g} = 4G$, $\mathfrak{y} = Y - {}^3/_4 c$ wird

$$g' = 8G,\ y' = \frac{8G\,(Y - {}^3/_4\, c) - cG}{8G}$$

$$= Y - {}^7/_8 c.$$

Wir haben hiermit eine hinreichende Anzahl von Punkten einer Curve (Taf. I., Fig. 2) bestimmt, in welcher das Rechteck $\mathfrak{g}\mathfrak{y}$ immer das Mittel aus zwei andern Rechtecken $gy + g'y'$ ist. Wir erinnern, daß $\mathfrak{g} = \frac{g + g'}{2}$. Das Gesetz der Curve ergibt sich folgendermaßen. Für $g = mG$, wo bei m irgend eine Zahl bedeutet,

wird $y = Y - \frac{m-1}{m} . c$, denn für $m = 8$ tritt Fall 6. ein, worin für $g = 8G$, $y = Y - \frac{7}{8} c$; für $m = 1$ wird $g = G$, $y = Y$, für $m = \frac{1}{2}$ wird $g = \frac{1}{2}G$, $y = Y - \frac{\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{2}} c = Y + c$, wie in 1.; für $m = \frac{1}{4}$ wird $g = \frac{1}{4}G$, $y = Y - \frac{\frac{1}{4}-1}{\frac{1}{4}} c = Y + 3c$, wie in 3.

Nun ist, da z. B. für $m = \frac{1}{2}$, $\frac{g}{G} = \frac{1}{2}$, für $m = \frac{1}{4}$, $\frac{g}{G} = \frac{1}{4}$, allgemein

$$\frac{g}{G} = m$$

und die Gleichung unserer Curve lautet

$$y = Y - \frac{\frac{g}{G} - 1}{\frac{g}{G}} c \text{ oder}$$

$$y = Y - \frac{g - G}{g} c = Y - c + \frac{G}{g} c.$$

Diese Gleichung gibt uns also die verlangte Function, für welche der nach der arithmetisch mittlern Kreisfläche g ausgewählte Baum auch hinsichtlich seiner Vollholzigkeit der wahre mittlere Modellstamm ist. Y, G und c sind constante Werthe, y ist die Ordinate, g die Abscisse des laufenden Punktes.

Um zu prüfen, ob die eben entwickelte Gleichung wirklich der Forderung, welche wir gestellt haben, Genüge leiste, müssen wir nachsehen, ob durch sie ausgedrückt ist, daß das Product aus der arithmetisch mittlern Kreisfläche in ihre Reductions-

zahl = ist der Hälfte der Summe, welche erhalten wird, wenn man jede Kreisfläche mit ihrer zugehörigen Reductionszahl multiplizirt und die Producte addirt.

Es ist $gy = Yg - cg + Gc = gY - (g - G)\,c$ und

$$g'y' = Yg' - cg' + Gc = g'Y - (g' - G)\,c;$$

es muß nun $2\left(\frac{g+g'}{2}\right)\mathfrak{y} = gy + g'y'$ sein. Es ist aber

$$2\,\frac{(g+g')}{2}\left(Y - c + \frac{G}{\frac{1}{2}(g+g')}\,c\right) =$$

$$g\left(Y - c + \frac{G}{g}\,c\right) + g'\left(Y - c + \frac{G}{g'}\,c\right)$$

$= gY - (g - G)\,c + g'Y - (g' - G)\,c$, was nach dem Vorigen $= gy + g'y'$ ist.

Hiermit ist also bewiesen, daß unsere obige Gleichung richtig construirt ist.

Es kommt nun lediglich auf den Werth der Constanten c an, welcher Art die Function sein soll.

A. Setzt man $c = Y$, so erhält man für G, $\frac{3}{4}$G, $\frac{1}{2}$G, $\frac{1}{4}$G die zugehörigen Ordinaten Y, $\frac{4}{3}$Y, 2Y, 4Y und die Gleichung

$y = Y - c + \frac{G}{g}\,c$ verwandelt sich in

$y = Y - Y + \frac{G}{g}\,Y = \frac{GY}{g}$ oder $gy = GY$, was, wie bekannt, die Gleichung der gleichseitigen Hyperbel, bezogen auf ihre rechtwinkligen Asymptoten als Axen, ist.

Hier muß also die Vollholzigkeit in demselben geometrischen Verhältniß größer werden, als die Kreisflächen der (gleichhohen) Stämme abnehmen. Alle Stämme besitzen gleichen Inhalt, ohne Rücksicht auf die Größe ihres Durchmessers. Denn es ist

$$ghR = gh\,\frac{YG}{g} = hYG;$$

$$g'hR' = g'h\,\frac{YG}{g'} = hYG;$$

$$g''hR'' = g''h\,\frac{YG}{g''} = hYG\,\ldots\ldots\ldots$$

also $ghR = g'hR' = g''hR'' \ldots. = hYG =$ constant.

Es ist also hier jeder Stamm zugleich Modellstamm, denn allen Bäumen von der Höhe h kommt der nämliche Inhalt hYG zu.

Die Umstände, für welche das eben entwickelte Resultat Geltung hat, kommen nun in der Praxis niemals vor. Denn es müßte dann die Reductionszahl auch größer als 1 werden können, was für den Schaftwalzensatz wenigstens unmöglich ist, weil dann die Stämme, da die Kreisflächen gegeben sind, nach oben hin dicker werden müßten; ja auch der Baumwalzensatz würde jeden beliebig großen Werth annehmen müssen*).

Wir haben daher noch andere Untersuchungen über die Art der Function, für welche der Stamm g' wirklich das mittlere Modell aller Stämme sein soll, anzustellen.

B. Ist $c = 0$, so wird $y = Y =$ constant. Unsere Curve geht hierfür in eine der Axe X parallele Gerade über (Fig. 3). Diesen Fall haben wir bereits betrachtet. Wir sahen, daß $g = g'$ für
$R = R' = R'' = \ldots.$ der Gleichung

$$aghR + a'g'hR' + a''g''hR'' + \ldots. = Agh\mathfrak{R}$$

Genüge leistet.

Für die Function $y = Y - c + \frac{G}{g}c$ liefert [(1)] dasselbe

*) Siehe übrigens auch §. 9.

Resultat, wie [(2)], oder es wird $g = g'$. Es folgt nämlich dann aus [(1)]

$$gy + g'y' = 2g\mathfrak{y},$$

$$g\left(Y - c + \frac{G}{g}c\right) + g'\left(Y - c + \frac{G}{g'}c\right) =$$

$$2g\left(Y - c + \frac{G}{g}c\right), \text{ oder}$$

$$g(Y - c) + Gc + g'(Y - c) + Gc = 2g(Y - c) + 2Gc, \text{ oder}$$

$$(g + g')(Y - c) = 2g(Y - c);$$

$$g = \tfrac{1}{2}(g + g')\frac{Y - c}{Y - c} = \tfrac{1}{2}(g + g') = g' \text{ aus } [(2)].$$

Für A wird $c = Y$ und

$$g = \tfrac{1}{2}(g + g')\frac{Y - Y}{Y - Y} = \frac{0}{0} \text{ oder unbestimmt.}$$

Es ist dieses Resultat dadurch zu verstehen, daß bei der gleichseitigen Hyperbel alle Rechtecke gy und $g'y'$ einander gleich sind, also nicht nur für $g = \tfrac{1}{2}(g + g')$ das Rechteck $g\mathfrak{y} = \tfrac{1}{2}(gy + g'y')$, sondern auch für jeden andern Werth von g, und daß $g\mathfrak{y}$, da $gy = g'y'$, auch jedem einzelnen derselben gleich ist.

Nehmen wir nun drei Klassen von gleicher Stammzahl a an, so ist für $agy + ag'y' + ag''y'' = (a + a + a)\,g\mathfrak{y}$ oder

$$gy + g'y' + g''y'' + \ldots\ldots = 3g\mathfrak{y},$$

worin zugleich $g = \dfrac{g + g' + g''}{3}$ sein soll, außer $y =$ constant, wieder die frühere Function $y = Y - c + \dfrac{G}{g}c$ möglich.

Es müßte also (Taf. I., Fig. 4) das Rechteck $g\mathfrak{y}$ das Mittel aus den drei Rechtecken gy, $g'y'$, $g''y''$, und zugleich die Abscisse g das Mittel aus g, g', g'' sein.

Es sei $g' = \frac{g + g''}{2}$, so wird

$$g = \frac{g + \frac{g + g''}{2} + g''}{3} = \frac{g + g''}{2} = g',$$

daher muß auch

$$\mathfrak{y} = y' \text{ und } g'y' = g\mathfrak{y}, \text{ also}$$

$$g\mathfrak{y} = \frac{gy + g\mathfrak{y} + g''y''}{3}, \text{ oder}$$

$$g\mathfrak{y} = \tfrac{1}{2}(gy + g''y'') \text{ sein.}$$

Es muß demnach die Curve dieselbe Gestalt wie Fig. 2 haben, bei deren Construction man von der Voraussetzung ausging, daß nur g und g'' gegeben und $g = \frac{1}{2}(g + g'')$ sei.

Die Curve Fig. 2 entspricht aber auch, wenn nicht $g' = \frac{g + g''}{2}$ ist, der allgemeinen Bedingung

$$3g\mathfrak{y} = gy + g'y' + g''y'',$$

denn es ist $gy = g\left(Y - c + \frac{G}{g}c\right)$, daher

$$gy + g'y' + g''y'' =$$

$$g\left(Y - c + \frac{G}{g}c\right) + g'\left(Y - c + \frac{G}{g'}c\right) + g''\left(Y - c + \frac{G}{g''}c\right), \text{ also}$$

$$3g\mathfrak{y} = (g + g' + g'')(Y - c) + 3Gc, \text{ und, da auch}$$

$$3g\mathfrak{y} = 3 . \frac{g + g' + g''}{3}\left(Y - c + \frac{G}{\tfrac{1}{3}(g + g' + g'')}c\right)$$

$$= (g + g' + g'')(Y - c) + 3Gc \text{ ist,}$$

so hat man $3g\mathfrak{y} = gy + g'y' + g''y''$.

Für eine beliebige Anzahl von g gilt dasselbe, denn es ist

$$gy + g'y' + g''y'' + \ldots + g^n y^n =$$

$$(g + g' + g'' \ldots + g^n)(Y - c) + nGc \text{ und}$$

$$n\mathfrak{g}\mathfrak{y} = \frac{n(g+g'+g''+\dots+g^n)}{n}\left(Y-c+\frac{G}{{}^1\!/_n(g+g'+g''+\dots+g^n)}c\right)$$

$$= (g+g'+g''+\dots+g^n)(Y-c)+nGc.$$

Aber auch dann, wenn nicht $a = a' = a'' \dots$ ist, macht wieder die Function $y = Y - c + \frac{G}{g}c$ den Werth $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}'$ möglich. Dann ist nämlich

(1) . . . . $agy + a'g'y' = (a+a')\,\mathfrak{g}\mathfrak{y}$ und

(2) . . . . $ag + a'g' = (a+a')\,\mathfrak{g}'$, woraus

$$\mathfrak{g}' = \frac{ag+a'g'}{a+a'};$$

es müßte nun $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}'$, oder auch $\mathfrak{y} = \frac{agy+a'g'y'}{ag+a'g'}$ sein.

Da y nur eine Function von g und nicht auch von a sein soll, so führen wir die vorige Function hier ein. Es wird daher

$$agy + a'g'y' = ag\left(Y - c + \frac{G}{g}c\right) + a'g'\left(Y - c + \frac{G}{g'}c\right) \text{ und}$$

$$(a+a')\,\mathfrak{g}\mathfrak{y} = (a+a')\left(\frac{ag+a'g'}{a+a'}\right)\left[Y - c + \frac{G}{\frac{ag+a'g'}{a+a'}}c\right]$$

welche beiden Werthe, wie man sieht, einander gleich sind.

Und im Allgemeinen wird

$$agy + a'g'y' + a''g''y'' + \dots =$$

$$ag\left(Y-c+\frac{G}{g}c\right)+a'g'\left(Y-c+\frac{G}{g'}c\right)+a''g''\left(Y-c+\frac{G}{g''}c\right)+\dots$$

$$= ag(Y-c) + a'g'(Y-c) + a''g''(Y-c) + \dots$$

$$+ aGc + a'Gc + a''Gc + \dots$$

$$= (ag + a'g' + a''g'' + \dots)(Y-c) + (a + a' + a'' + \dots)Gc$$

und

$$(a + a' + a'' + \ldots.)\, g\mathfrak{y} =$$

$$(a+a'+a''+\ldots)\left(\frac{ag+a'g'+a''g''+\ldots}{a+a'+a''+\ldots}\right)Y - c + \frac{G}{\frac{ag+a'g'+a''g''+\ldots}{a+a'+a''+\ldots}}\,c$$

$$= (ag + a'g' + a''g'' + \ldots.)(Y - c) + (a + a' + a'' + \ldots.)\, Gc.$$

Das Resultat dieser Entwicklung geht dahin: der nach der arithmetisch mittlern Kreisfläche bestimmte Modellstamm ist hinsichtlich seines Holzgehaltes mit Berücksichtigung der verschiedenen Vollholzigkeiten das wahre Mittel aus allen Stämmen, wenn

$$R = y = Y - c + \frac{G}{g}\, c$$

ist.

Hat c in dieser Gleichung eine negative Bedeutung, so besitzt die Curve die Gestalt Fig. 5; für c positiv hat sie, wie bereits gefunden wurde, die Gestalt Fig. 2.

Fig. 5 und Fig. 2 sind congruent, aber umgekehrt, wenn c dem absoluten Werthe nach dasselbe, aber mit entgegengesetztem Zeichen behaftet ist.

Unsere vorstehenden Auseinandersetzungen haben blos den Zweck, nachzuweisen, daß, bei gleicher Höhe aller Stämme, aber bei ungleicher Vollholzigkeit, selbst dann, wenn letztere in einer bestimmten Abhängigkeit von der Stammstärke steht, der nach der arithmetisch mittlern Kreisfläche ausgewählte Stamm nicht unter allen Umständen, sondern nur für eine gewisse gegebene Function der eigentliche Modellstamm sei. Da nun in Wirklichkeit kaum ein Bestand vorkommen wird, in welchem die Stammhöhen total gleich sind, so haben wir nicht nöthig zu untersuchen, ob die gefundene Function in der Praxis stattfinde. Wir werden aber späterhin bei einer allgemeinern Entwicklung von derselben Gebrauch machen.

Fall V. F., 8. Reductionszahl keine Function der Stärke.

In diesem Fall bildet der ganze Bestand eine einzige Höhenklasse; die Klassification nach Stärken würde nichts nützen, weil selbst Stämme von gleicher Stärke ungleiche Reductionszahlen besitzen können.

Die Holzmassenaufnahme findet, wenn es auf der höchsten Grad der Genauigkeit ankommt, in der Weise statt, daß man jeden Stamm kubisch vermißt. Auch der vorliegende Fall existirt blos in der Annahme.

Fall V. F., 9. Reductionszahl die nämliche, Stärken verschieden, Höhe eine Function der Stärke.

Unter dieser Voraussetzung besitzen alle Stämme, welche gleichen Durchmesser haben, auch dieselbe Vollholzigkeit. Sind

$h, h', h'' \ldots.$ die Höhen der Stärkeklassen, so ist

$$J = \pi r^2 hR \,.\, a + \pi r'^2 h'R \,.\, a' + \pi r''^2 h''R \,.\, a'' + \ldots.$$

Man kann sich hier wieder einen Stamm denken, dessen Inhalt, multiplicirt durch die Anzahl A aller Stämme, ein Product liefert $= J$. Der Durchmesser dieses Stamms sei $= 2\mathfrak{r}$, seine Höhe $= \mathfrak{h}$, so ist

$$\pi \mathfrak{r}^2 \mathfrak{h} R \,.\, A = \pi r^2 hR \,.\, a + \pi r'^2 h'R \,.\, a' + \pi r''^2 h''R \,.\, a'' + \ldots.$$

oder

$$\pi \mathfrak{r}^2 \mathfrak{h} \,.\, A = \pi r^2 h \,.\, a + \pi r'^2 h' \,.\, a' + \pi r''^2 h'' \,.\, a'' + \ldots.$$

Ist, wie angenommen, die Höhe eine Function der Stärke, also $h = f(r)$, $h' = f(r')$, $h'' = f(r'') \ldots.$ und demnach auch $\mathfrak{h} = f(\mathfrak{r})$, so hat man

$$\pi \mathfrak{r}^2 f(\mathfrak{r}) \,.\, A = \pi r^2 h \,.\, a + \pi r'^2 h' \,.\, a' + \pi r''^2 h'' \,.\, a'' + \ldots.$$

Aus dieser Gleichung läßt sich wieder, wenn die Art der Function bekannt ist, $\mathfrak{r}$ bestimmen. Der dazu gehörende, im Bestand befindliche Stamm ist das wahre Modell aller Stämme.

Es sei wieder beispielsweise $f(r) = q\sqrt{r}$ (wobei unterstellt wird, die Höhen der Stämme wüchsen wie die Ordinaten einer apollonischen Parabel, wenn die Durchmesser wie deren Abscissen zunehmen), so ist

$$\pi r^2 q\sqrt{r} \,.\, A = \pi r^2 h \,.\, a + \pi r'^2 h' \,.\, a' + \pi r''^2 h'' \,.\, a'' + \ldots$$

$$q r^{5/2} \,.\, A = r^2 h \,.\, a + r'^2 h' \,.\, a' + r''^2 h'' \,.\, a'' + \ldots.$$

$$r^{5/2} = \frac{r^2 h \,.\, a + r'^2 h' \,.\, a' + r''^2 h'' \,.\, a'' + \ldots.}{qA}$$

$$r = \left(\frac{r^2 h \,.\, a + r'^2 h' \,.\, a' + r''^2 h'' \,.\, a'' + \ldots.}{qA}\right)^{2/5}$$

Es ist kaum nöthig, darauf aufmerksam zu machen, daß diese Regel zur Auswahl des mittlern Modellstamms nicht zur praktischen Ausführung gelangt. Die Function der Höhe in Rücksicht auf die Stärke der Bäume ist sowohl wechselnd, als unbekannt. Der vorliegende Fall hat an und für sich übrigens gar keine Bedeutung, weil es unsern Erfahrungen gemäß niemals vorkommt, daß die Reductionszahlen bei ungleichen Stammhöhen die nämlichen für alle Stämme bleiben. Wir mußten aber doch diesen Fall um deßwillen betrachten, weil er für den 10. Fall Anwendung findet.

Dieselbe Entwicklung, welche wir unter V., 7. für die Reductionszahlen gemacht haben, gilt mutatis mutandis auch für die Höhen, wenn diese als Functionen der Stärke angenommen werden. Es muß also, wenn H die zu der Kreisfläche G gehörende Höhe, h die Ordinate und g die Abscisse des laufenden Punktes bezeichnet, im allgemeinen die Function

$$h = H - c + \frac{G}{g}c$$

bestehen, wenn der nach der arithmetisch mittlern Kreisfläche ausgewählte Modellstamm zugleich in Bezug

auf seinen Holzgehalt mit Berücksichtigung der ungleichen Höhen das Mittel aus der Summe der Inhalte aller Stämme sein soll.

Der vorstehenden Gleichung wird wieder Genüge geleistet, sowohl, wenn h constant, als auch dann, wenn h den Lauf der Curven Fig. 2 oder 5 verfolgt.

Fall V. G., 10. Stärke verschieden. Reductionszahl und Höhe eine stetige Function der Stärke.

Hier läßt sich also sowohl die Höhe, als die Reductionszahl durch den Diameter ausdrücken.

Der Halbmesser r des wahren Modellstamms wird, gleichviel für welche Function, gefunden durch die Gleichung

$\pi r^2 \mathfrak{h} \mathfrak{R} . A = \pi r^2 hR . a + \pi r'^2 h'R' . a' + \pi r''^2 h''R'' . a'' + \ldots$ oder

$\pi r^2 f(r) f'(r) . A = \pi r^2 hR . a + \pi r'^2 h'R' . a' + \pi r''^2 h''R'' . a'' + \ldots$

Ist z. B.

$f(r) f'(r) = qr^{\alpha}$, so hat man $r^2 f(r) f'(r) = qr^{\alpha+2}$ und

$$r = \left[\frac{r^2 hR . a + r'^2 h'R' . a' + r''^2 h''R'' . a'' + \ldots}{qA} \right]^{\frac{1}{\alpha+2}}$$

Nun fragt es sich abermals, wie die beiden Functionen beschaffen sein müssen, damit der nach der arithmetisch mittlern Kreisfläche bestimmte Stamm zugleich das Modell sämmtlicher Stämme in Bezug auf seinen Inhalt (also auch mit Berücksichtigung der verschiedenen Höhen und Vollholzigkeiten) sei.

Betrachten wir das Product aus Höhe und Vollholzigkeit als einen einzigen Ausdruck und bezeichnen wir

$f(r) f'(r)$ mit $\mathfrak{p}$, hR, $h'R'$, $h''R''\ldots$ mit p, p', $p''\ldots$,

so wäre

$$\pi r^2 \mathfrak{p} . A = \pi r^2 p . a + \pi r'^2 p' . a' + \pi r''^2 p'' . a'' + \ldots$$

Nun haben wir aber bereits gesehen, daß dieser Gleichung für den Fall

$$\pi r^2 = \frac{\pi r^2 + \pi r'^2 + \ldots}{A}$$

Genüge geleistet wird, wenn die Function

$$p = P - c + \frac{G}{g} . c$$

besteht.

Es wird also nur dann der nach der arithmetisch mittlern Kreisfläche ausgewählte Modellstamm das wahre Mittel aller Stämme sein, wenn die Producte aus Höhe und Reductionszahl entweder constant sind, oder den Lauf der Curven Fig. 2 oder Fig. 5 verfolgen.

Dieses Resultat läßt sich, wenn man erwägt, daß

$h . R = h . \frac{i}{gh} = \frac{i}{g} = h' =$ König's Richthöhe ist, auch

noch in folgender Fassung geben. Denkt man sich alle Bäume ohne Aenderung ihres Inhaltes und ihrer Querkreisflächen als Cylinder gestaltet (wobei natürlich die Höhe h in h' sich ändert), denkt man sich weiter, diese Cylinder auf einer geraden Linie (der Abscissenaxe) nach der Größe ihrer Basen so geordnet, daß ihre Abstände von einem Punkte derselben mit den Kreisflächen proportional sind und dann ihre Höhen durch einen Zug aus freier Hand verbunden, so muß die so entstehende Linie entweder der Horizontalen parallel sein oder die Krümmung der Curven Fig. 2 oder 5 einhalten.

Der so eben betrachtete Fall ist praktisch von großer Bedeutung und zwar

1. deßwegen, weil die Aufnahme der Holzmassen nach dem mit der arithmetisch mittlern Kreisfläche versehenen Modellstamm sich ihrer Einfachheit wegen auszeichnet und deßhalb auch von vielen achtbaren Forstschriftstellern angelegentlich empfohlen worden ist;
2. weil in fast jedem Walde weder die Höhen, noch die Vollholzigkeiten der Stämme einander gleich sind, also gerade in der Wirklichkeit die Umstände stattfinden, welche wir unter 10. in Voraussetzung genommen haben.

Es kommt nun darauf an, zu entscheiden, inwiefern in der Wirklichkeit die Function stattfindet, zu der uns die vorhinige Entwicklung führte.

Im geschlossenen, regelmäßig erzogenen (insbesondere nach den Regeln der Kunst durchforsteten) Walde ist jedenfalls sowohl die Höhe als die Reductionszahl der Bäume eine Function der Stärke. Denn wir sehen, daß im Durchschnitt die stärksten Stämme auch am höchsten sind und dabei den größten Baumwalzensatz besitzen, daß dagegen die schwächern Stämme sowohl eine geringere Totallänge haben, als auch im Verhältniß weniger Holzmasse abwerfen.

Einzelne Ausnahmen von dieser Regel finden sich zwar überall vor. Wir haben gar keine vollkommen geschlossene Waldungen; in jedem Districte gibt es hie und da kleinere Lücken. Vorzüglich ist dies der Fall in den durch natürliche Besamung begründeten Beständen, und auch in Pflanzungen, welche sonst doch vor der Saat entschieden besseres Gedeihen zeigen, wenn sie der Natur der Holzart angemessen und zweckmäßig ausgeführt sind, gehen immer einzelne Exemplare ein. Die Bäume, welche an einer solchen Lücke stehen, breiten sich mehr in die Aeste aus, ohne dabei die Höhe zu erreichen, welche der von allen Seiten durch andere Bäume umschlossene Stamm

erlangt. Sie erhalten dadurch eine größere Vollholzigkeit bei einer verhältnißmäßig geringern Totalhöhe.

Daß man übrigens ganz allgemein sowohl die Höhe, als die Vollholzigkeit als eine Function der Stärke ansieht, geht aus den Verfahren hervor, welche man zur Erforschung der Holzmassen einzuschlagen gewohnt ist. In dichtgeschlossenen, frohwüchsigen Beständen klassificirt kein Praktiker nach Höhen; er setzt voraus, daß alle Stämme von gleicher Stärke auch gleiche Länge besitzen. Was heißt dies aber Anderes, als aussprechen, daß die Höhe und Vollholzigkeit, wenigstens innerhalb der Grenzen der Klassenweite, Functionen der Stärke sind?

Uebrigens handelt es sich gar nicht um die Höhe und Reductionszahl jedes einzelnen Stammes; wenn man diese mißt, wird man stets Abweichungen finden, welche die Stetigkeit der Function bezweifeln lassen; da wir aber in der Praxis die Stämme jeder Klasse zusammenfassen und als ein Ganzes betrachten, so haben wir die Wahrscheinlichkeit, daß diese von Zufälligkeiten herrührenden Verschiedenheiten in den Functionen der einzelnen Stämme sich ausgleichen. Die Function, bestimmt aus einer größern Anzahl von Stämmen, gewinnt dadurch mehr Stabilität.

Allein es genügt für die Richtigkeit der Holzmassenbestimmung aus einem einzigen Stamme keineswegs, daß überhaupt die Stammlängen und Vollholzigkeiten in einer gewissen Abhängigkeit von der Querkreisfläche stehen; jene muß vielmehr eine ganz concrete und zwar von der Art sein, wie sie durch die Function $p = P - c + \frac{G}{g} c$ ausgedrückt ist.

Wird indessen angenommen, das Product aus Höhe und Vollholzigkeit sei nicht eine Function der angegebenen Art, so ist jedenfalls das Verfahren der Holzmassenbestimmung nach der

arithmetisch mittlern Kreisfläche ein unrichtiges und das Resultat, daß die Masse des ganzen Bestandes, ermittelt aus dem Inhalte der Stärkeklassenstämme, gleich sei der Masse, ermittelt nach Stämmen von der arithmetisch mittlern Kreisfläche, könnte nur auf einer zufälligen, also jedenfalls höchstseltenen, Ausgleichung verschiedener, von keinem Gesetz abhängiger Größen beruhen.

Die Untersuchung, inwiefern die oftерwähnte Function in den Stämmen, aus welchen unsere Waldungen zusammengesetzt sind, sich ausgeprägt finde, werden wir an einem andern Orte führen und verweisen deßhalb auf §. 7.

Fall V. G., 11. Stärke verschieden, Höhe eine Function der Stärke, Reductionszahl unregelmäßig verschieden.

Jeder Stamm muß kubisch vermessen werden.

Fall V. K., 12. Stärke und Höhe ohne Regelmäßigkeit verschieden, Reductionszahl constant.

Dieser Fall, der in der Natur nicht vorkommt, hat nur theoretisches Interesse.

Man müßte, um den Massengehalt eines Bestandes unter den hier gemachten Voraussetzungen zu erfahren, die Stämme nach Höhen und Stärken klassificiren. Zur Ermittlung der Reductionszahl genügte es, einen einzigen Stamm kubisch zu vermessen. Es ist

$$J = ghR \,.\, a + g'h'R \,.\, a' + g''h''R \,.\, a'' + \ldots$$
$$= R\,(gh \,.\, a + g'h' \,.\, a' + g''h'' \,.\, a'' + \ldots),$$

wobei das g und h in verschiedenen Gliedern einander gleich sein können, z. B. möglicher Weise $g = g''$ oder $h' = h''$.

Wäre i der Inhalt, gh der Walzengehalt eines Baumes, so würde

$$J = \frac{i}{gh} (gh . a + g' h' . a' + g'' h'' . a'' + \ldots)$$

sein.

Fall V. K., 13. Höhe und Stärke unregelmäßig verschieden, Reductionszahl eine Function der Stärke.

Hier besitzen also diejenigen Stämme, welche gleichen Durchmesser haben, auch gleiche Reductionszahl, einerlei, ob ihre Höhen gleich oder verschieden sind. Es braucht kaum bemerkt zu werden, daß dieser Fall in der Wirklichkeit nicht stattfindet.

Das Verfahren zur Holzmassenaufnahme wäre folgendes. Man bringt diejenigen Stämme, welche gleiche Stärke und Höhe besitzen, in eine Klasse, läßt sodann aus jeder Klasse Modellstämme fällen und berechnet durch Multiplication des mittlern Inhaltes dieser mit der Anzahl der in der Klasse befindlichen Stämme den Inhalt der ganzen Klasse. Aus den Massen der einzelnen Klassen setzt sich sodann der Holzgehalt des ganzen Bestandes zusammen.

Fall V. K., 14. Stärken und Höhen unregelmäßig verschieden. Reductionszahl eine Function der Höhe.

Alle Stämme von gleicher Höhe sind also auch gleich vollholzig. Das Verfahren zur Holzmassenaufnahme ist das im vorigen Fall angegebene.

Fall V. K., 15. Stärke und Höhe verschieden. Reductionszahl eine Function der Stärke und Höhe.

Da alle diejenigen Stämme, welche gleiche Stärke und Höhe besitzen, auch mit der nämlichen Vollholzigkeit versehen sind, so kann hier die Massenaufnahme dadurch abgekürzt werden, daß man Stärke-Höhenklassen (durch directes Messen der beiden Dimensionen) bildet. Man läßt sodann aus jeder Klasse einen Modellstamm fällen, berechnet ihn kubisch und bestimmt aus den Klasseninhalten die Masse des ganzen Bestandes.

Fall V. K., 16. Stärke, Höhe und Reductionszahl unregelmäßig verschieden.

Jeder Stamm muß kubisch vermessen werden.

§. 3.

Die practischen Resultate*), welche sich aus den im vorigen Paragraphen entwickelten Regeln ergeben, sind folgende:

1. Das kubische Ausmessen des Inhaltes eines jeden einzelnen Stammes ist nur dann nöthig, wenn die Reductionszahl für jeden Stamm verschieden und keine stetige Function der Stärke, Höhe oder beider zugleich ist.
2. Wenn man die Bäume in einem Holzbestand nach Stärken und Höhen klassificirt und aus jeder Stärke-Höhenklasse einen Stamm fällen läßt, welchen man kubisch vermißt, so setzt man bei diesem Verfahren voraus, daß die Reductionszahl eine stetige Function des Durchmessers oder der Höhe ist, oder, daß diejenigen Stämme, welche gleichen Durchmesser oder gleiche Höhe haben, auch die nämliche Reductionszahl besitzen. Es wird weiter vorausgesetzt, daß die Höhe keine Function der Stärke ist. Denn wäre sie diese, so brauchte man nicht auch nach Höhen zu klassificiren.
3. Wenn man die Stämme in einem ungleich hohen Bestande blos nach Stärken klassificirt, so wird angenommen, daß die Höhen stetige Functionen der Stärke sind. Und wenn man aus jeder Klasse blos Modellstämme fällen läßt, so wird weiter unterstellt, daß die Reductionszahlen innerhalb jeder Klasse die nämlichen bleiben.

*) Bei den verschiedenen Verfahren zur Holzmassenaufnahme können noch andere theoretische Voraussetzungen gemacht werden, welche in §. 2 behandelt worden sind, aber hier um deßwillen übergangen worden, weil sie in der Wirklichkeit nicht vorkommen.

4. Wenn man in einem ungleich hohen Bestand blos nach Stärken klassificirt und einen oder mehrere Modellstämme nach der arithmetisch mittlern Kreisfläche fällen läßt, so nimmt man an, daß die Producte aus Reductionszahl und Höhe Functionen der Stärke sind und unter der Gestalt

$$p = P - c + \frac{G}{g} c$$

erscheinen. Hier bedeuten p, P zwei solche Producte, g, G die zu denselben gehörenden Stammquerkreisflächen, c eine aus der Beobachtung zu bestimmende Constante.

5. Wenn man in einem gleichhohen Bestand nach Stärken klassificirt

a) und aus jeder Klasse Modellstämme auswählt, so setzt man voraus, daß die Reductionszahlen zwar Functionen der Stärke sind (daß also alle Stämme mit gleichem Durchmesser gleiche Vollholzigkeit besitzen), daß aber diese Function nicht unter der Gestalt

$$y = Y - c + \frac{G}{g} c$$

erscheint. y, Y sind hier die zu den Querflächen g, G gehörenden Reductionszahlen, c ist wieder eine Constante.

b) Wenn man für den ganzen Bestand einen oder mehrere Modellstämme, gleichviel aus welcher Klasse, fällen läßt, so wird unterstellt, daß die Reductionszahl für alle Stämme (also für Bäume von verschiedenen Durchmessern) die nämliche bleibt.

c) Wenn man einen oder mehrere Modellstämme nach der arithmetisch mittlern Kreisfläche fällen läßt, so nimmt man an, daß die Reductionszahlen Functionen der Stärke sind und unter der Gestalt

$$y = Y - c + \frac{G}{g} c$$

erscheinen.

§. 4.

Zur Vermeidung von Mißverständnissen sehen wir uns veranlaßt, zu bemerken, daß die in §. 2 enthaltenen Entwicklungen nur den Zweck haben, die mathematische Grundlage für die Verfahren zur Holzmassenaufnahme anzugeben und daß wir zu dem Ende manche Combinationen aufstellen und beleuchten mußten, welche in der Natur gar nicht vorkommen. Es wurde insbesondere beabsichtigt, die Methode ausfindig zu machen, welche eingehalten werden muß, wenn das genaueste Resultat erzielt werden soll. Unsere Entwicklungen lehren, welchen Fehler man durch gewisse theoretische Voraussetzungen begehen kann, wenn diese in der Wirklichkeit nicht stattfinden. Je größer die Abweichung in der Natur von der theoretischen Unterstellung ist, um so größer wird der Fehler sein, der sich in das gewonnene Resultat einschleicht.

Es fragt sich nun, welche von den V. in §. 2 beachteten Fällen in unsren Waldungen vorkommen und welches Verfahren der Holzmassenaufnahme für dieselben zu wählen sei.

Vorerst wollen wir indessen ausdrücklich erklären, daß wir diejenige Methode, welche mathematisch das genaueste Resultat liefert, nicht auch immer zugleich für die am meisten praktische halten. Die genaueren Verfahren kosten gewöhnlich viele Zeit und Arbeit. Die aufgewandte Mühe muß aber im Verhältniß stehen zu der Genauigkeit, welche man verlangt. Unter Umständen kann ein Verfahren, welches weniger sichere Resultate liefert, einem genaueren vorzuziehen sein.

Ganz falsch ist übrigens der Grundsatz, daß man die genaueste Methode deßhalb nicht anwenden dürfe, weil die außerdem

sich einstellenden Fehler ohnehin kein ganz richtiges Resultat erwarten lassen. Gerade dieser letztere Umstand veranlaßt uns, überall da, wo möglicherweise eine solche Genauigkeit erzielt werden kann, Alles aufzubieten, um dieselbe zu erreichen. Wird ein Fehler blos dem andern Fehler zu Liebe zugegeben, so häufen sich die Irrthümer immer mehr an, und das Endresultat wird ganz unzuverlässig. Es kann also nur dann eine genauere Methode aufgegeben werden, wenn der durch sie erzielte Effect die aufgewendete Mühe nicht lohnt.

In unsern Waldungen, selbst in den ganz regelrecht erzogenen, sind niemals die Höhen und Reductionszahlen der Bäume mathematisch stetige Functionen der Stammstärken. Es müßte deßhalb, wenn es sich um die höchste Genauigkeit handelt, jeder Stamm für sich kubisch vermessen werden.

Daß diese Manipulation nicht ausführbar ist, liegt am Tage. Zuerst erfordert sie einen unendlichen Aufwand an Zeit und Arbeit, dann aber verlangt sie auch, daß jeder Stamm gefällt wird. Das Schaftholz könnte zwar unter Anwendung geeigneter Instrumente an stehenden Bäumen bestimmt werden; aber zur Ermittlung des Reis- und Wurzelholzgehaltes ist es durchaus nöthig, daß der Stamm umgehauen und gerodet wird.

§. 5.

Am wenigsten sind Höhe und Reductionszahl Functionen der Stärke in Beständen, deren Bäume in freiem Stand sich befinden, wie z. B. auf Viehwaiden und in Abtriebsschlägen.

So lange der Baum noch gesund ist und sein natürliches Lebensziel noch nicht erreicht hat, steht indessen auch hier die Höhe und Vollholzigkeit noch in einiger Abhängigkeit von der Stärke; fangen aber die Bäume an, abständig und zopfdürr zu werden, verlieren sie ihre Kronen und fällt der obere Theil des

Schaftes ab, so stellen sie unregelmäßige Körper vor, deren Inhalt und Höhe in keinem genauern Zusammenhang mit der Stammquerfläche sich befindet.

Handelt es sich darum, den Holzgehalt eines aus Stämmen dieser Art zusammengesetzten Bestandes zu ermitteln (ein Fall, der bei Waldwerthrechnungen u. s. w. gar nicht selten vorkommt), so müßte eigentlich jeder Stamm kubisch vermessen werden. Da dieses nicht wohl angeht, so fragt es sich, welches Verfahren diesem zunächst am meisten zum Ziele führt.

Nimmt man an, alle Stämme, welche gleiche Höhe und gleiche Stärke besitzen, hätten auch die nämliche Vollholzigkeit, so genügte es, Durchmesser-Höhenklassen zu bilden und aus jeder Klasse einen Modellstamm zu fällen, um den Gesammtmassengehalt des Bestandes zu erfahren. Da aber die Reductionszahlen der einzelnen Stämme in den Klassen nicht gleich, vielmehr, wie bekannt, sehr abweichend von einander sind, so wird bei der angegebenen Methode ein Fehler begangen, der um so größer ist, je mehr die Vollholzigkeit der Stämme differirt.

Vielleicht existirt in jeder Klasse ein Stamm von der mittlern Vollholzigkeit für diese Klasse. Seine Stärke zu berechnen, ist nicht möglich, da keine Abhängigkeit seiner Reductionszahl von dem Durchmesser besteht. Man kann ihn auch nicht wohl mit Sicherheit nach dem Augenmaß aussuchen, weil man ja nicht genau weiß, was die mittlere Vollholzigkeit ist.

Jedenfalls haben wir aber doch einen annähernden Begriff von der letztern. Wenn nun mehrere Stämme nach derselben ausgewählt und vermessen werden, so liegt die Wahrscheinlichkeit vor, dem wahren Mittel näher zu kommen.

Das Verfahren, um einen aus ganz unregelmäßig gebildeten Stämmen (deren Höhe und Vollholzigkeit in keinem Verhältniß zum Durchmesser stehen) zusammengesetzten Bestand aufzunehmen, besteht darin, Klassen nach Stärken und Höhen zu er-

richten, aus jeder Klasse mehrere, wenn thunlich recht viele Modellstämme kubisch zu vermessen, aus deren Inhalten das Mittel zu nehmen, mit diesem die Stammzahl in den Klassen zu multipliciren und die Produkte zu summiren.

Will man übrigens die unnöthige Berechnung der Klassenmodellstämme umgehen, so gibt uns die in §. 2, Fall V. F., 6. aufgestellte Regel dazu das Mittel an die Hand. Es seien i, i′, i″. . . . die Inhalte mehrerer Stämme aus einer Klasse, g, g′, g″. . . . die dazu gehörigen Kreisflächen, G die Kreisflächensumme, J der Inhalt aller Stämme der Klasse, so hat man

$$\frac{i + i' + i'' + \ldots.}{J} = \frac{g + g' + g'' + \ldots.}{G}, \text{ woraus}$$

$$J = \frac{G\,(i + i' + i'' + \ldots.)}{g + g' + g'' + \ldots.}$$

folgt.

§. 6.

Ganz zu verwerfen ist die Schätzung der Massen sowohl für einzelne Bäume, als für ganze Bestände.

Es ist zwar schon vorgekommen, daß erfahrene Techniker den Holzgehalt von größern Distrikten bis auf wenige Klafter genau abschätzten, ohne die Größe der Fläche durch Vermessung zu kennen. Aber das waren immer Ausnahmen; die nämlichen Taxatoren haben auch ebenso oft und wohl noch häufiger um Hunderte von Klaftern sich geirrt. Derartige Fälle werden natürlich verschwiegen; daher kommt es, daß so viele Forstleute noch an der Massenschätzung festhalten. Sie beurtheilen den Werth derselben nach einzelnen günstigen Resultaten, welche sie geliefert hat.

Auch selbst dann, wenn die Holzmasse von nur einem Morgen geschätzt und aus dieser und dem bekannten Flächengehalt des ganzen Waldes auf die in letzterm befindliche Holzmasse geschlossen wird, erhält man höchst unrichtige Resultate. Alle Diejenigen, welche das Gegentheil behaupten, haben keine vergleichenden Untersuchungen angestellt.

Weniger unsicher, aber immer noch ungenau genug, ist das Schätzen des Holzgehaltes einzelner Bäume. Man hat vorgeschlagen, es durch Holzhauer oder Holzsetzer ausführen zu lassen. Allein die jetzige Generation dieser Leute ist in dem fraglichen Geschäft nicht geübter, als der Forstbeamte. Seitdem das Holz nicht mehr in den Schlägen neben dem Stockloch, sondern an den Wegen aufgesetzt wird, haben die Holzhauer keine Gelegenheit mehr, sich im Schätzen zu vervollkommnen. Der Holzsetzer lernt dies auch nicht, da ihm das Holz aus den Schlägen an die Stelle, wo er es auffetzt, gebracht wird. Er weiß nicht, wie groß und stark der Baum war, dessen Holz er aufklaftert.

Das Schätzen des Inhaltes eines Baumes kann in mehrfacher Weise geschehen. Man hat entweder einen Baum oder irgend einen andern Körper im Gedächtniß, den man als Einheit des Maßes betrachtet, oder man vergleicht den zu taxirenden Baum mit einer Anzahl von Bäumen, deren Bild man sich eingeprägt hat und deren Holzgehalt man kennt. Beide Verfahren setzen große Uebung des Augenmaßes voraus. Wie schwer hält es, den Inhalt eines ganz regelmäßigen Körpers, z. B. eines Würfels, eines Cylinders oder einer Kugel zu schätzen, selbst wenn die Einheit des Maßes von der nämlichen Form, z. B. ein kleinerer Cubus, Cylinder oder eine kleinere Kugel neben dem zu taxirenden größern Körper liegt. Wie viel schwerer muß es sein, einen ganz unregelmäßig geformten Körper, von dem man erst durch Rechnung erfahren kann, welcher geometrischen

Figur seine Gestalt am meisten sich nähert, mit der Einheit des Maßes zu vergleichen, zumal, wenn diese selbst keine regelmäßige Gestalt besitzt, wie es der Fall ist, wenn man von dem bekannten Inhalt eines Baumes ausgeht. Wer aber nach der andern Methode schätzen will, muß eine sehr große Anzahl von Bäumen seinem Gedächtniß eingeprägt haben; er muß ferner im Stande sein, denjenigen Baum aus dieser Anzahl herauszufinden, welcher mit dem zu taxirenden am meisten Aehnlichkeit hat. Das ist eine der schwierigsten Aufgaben, die gestellt werden können.

Eine dritte Art des Einschätzens wäre folgende. Man begutachtet die Stammkreisquerfläche, die Höhe und die Vollholzigkeit. Am leichtesten zu taxiren ist die Höhe, weil diese sich unmittelbar darstellt, viel schwerer dagegen die Kreisfläche. Wenn man sich nicht weit genug vom Stamm aufstellt, so sieht man nicht einmal den vollen Halbkreis des Umfangs u. Gesetzt aber auch, dieser sei richtig taxirt, so muß aus ihm noch die Kreisfläche abgeleitet werden. Dies geschieht, indem $\frac{u}{2}$ zum Quadrat erhoben und dann durch π dividirt wird. Diese complizirte Rechnung soll dann im Kopfe und in einem Augenblick ausgeführt werden.

Viel schneller, als das Abschätzen, geht das wirkliche Messen der Baumstärken mit Hülfe der Kluppe von Statten. Es ist deßhalb schon dieses Vortheils wegen zu empfehlen, ganz abgesehen davon, daß es auch weit richtigere Resultate liefert. Man hat nur die Kluppe anzulegen und abzulesen. Beim Schätzen muß der Stamm, sobald er einige Dicke hat und keine kreisrunde Querfläche besitzt, von mehreren Seiten her betrachtet werden. Wenn man einmal eine größere Anzahl von Stämmen taxirt hat, so ermüdet das Auge, man verliert den Maßstab, nach welchem die Stärke zu beurtheilen ist, und schätzt ganz falsch.

Auch das Taxiren der Baumhöhen nach dem Augenmaß ist zu verwerfen, da zweckmäßig eingerichtete Hypsometer ebenso schnell fördern und natürlich die Höhe auch richtiger angeben. Geringere Höhenunterschiede, z. B. von 2—5 Fußen können in älteren Beständen gar nicht mehr taxirt werden; in einem geschlossenen, über 80 Fuß hohen Bestande läßt es sich sogar nicht mehr unterscheiden, ob die Höhendifferenz zweier nebeneinanderstehender Bäume 5 oder 10 Fuße betrage*).

In der Ebene gelingt das Abschätzen der Stammlängen noch am ersten, wenn es möglich ist, immer in die nämliche Entfernung von jedem Stamm zu treten. Auf unebenem Terrain verursacht dagegen die optische Täuschung, daß der Taxator sich oft um ein Beträchtliches irrt. Wir schätzen die Höhe eines vor uns befindlichen Gegenstandes nach dem Sehwinkel, unter welchem der Gegenstand erscheint. Nun ist, wenn man einen Baum vom Fuße eines Berges und vom Gipfel, beidemal in der nämlichen Entfernung vom Wurzelstock aus betrachtet, zwar der Sehwinkel von oben größer, als der von unten; man sollte deßhalb den Baum, welchen man vom Gipfel des Berges erblickt, für höher halten, als wenn man ihn vom Fuße desselben sieht. Allein in letzterm Fall muß man den Kopf mehr rückwärts biegen, um den Wipfel zu erblicken und läßt sich dadurch dazu verleiten, anstatt des Sehwinkels den Winkel zu nehmen, welchen der Kopf beschreibt, dessen Auge zuerst auf den Wurzelstock und dann auf die Spitze des Baumes gerichtet ist. Dies hat zur Folge, daß ein Baum, vom Fuße einer Anhöhe aus gesehen, höher erscheint,

*) Im verflossenen Jahre maß der Verfasser zwei Birken in einem zum Revier Niederohmen gehörenden Walde. Mehrere tüchtige Holzhauer und der Forstschütze erklärten, der eine Baum sei 85, der andere 100 Fuß hoch, während das Hypsometer für beide Bäume die nämliche Höhe angab. Nach dem Fällen der Stämme stellte es sich heraus, daß wirklich keine Differenz in der Höhe der beiden Birken bestand.

als wenn man ihn von einem oberhalb gelegenen Punkte erblickt.

Irrthümer im Schätzen der Baumhöhen können aus noch andern Quellen entspringen. Steht z. B. ein kleiner Baum neben einem größern, so hält man diesen für höher, als er wirklich ist, weil seine Länge, des Gegensatzes halber, um so mehr in die Augen springt. So wird das Oberholz in Mittelwaldungen meist zu hoch angegeben. Glattschaftige gerade Bäume hält man für höher, als krumme, knorrige, weil letztere in der Regel nicht die Höhe erreichen, wie erstere und weil Krümmungen oder Knorren den Baum in Absätze theilen, deren jeder für sich geschätzt werden kann, während bei glatten Stämmen diese Ruhepunkte für das Auge fehlen.

Das Begutachten der Schaft- oder gar der Baumwalzensätze nach dem Augenmaße liefert ganz unbrauchbare Resultate. Man muß die Sache nur probirt haben, um überzeugt zu sein, daß die Schätzung der Vollholzigkeit niemals stattfinden darf, wo es sich um genaue Kenntniß der Bestandsmassen handelt.

§. 7.

Wir haben im vorigen Paragraphen gesehen, daß in Beständen, in denen die Reductionszahlen der Bäume keine Functionen der Stärke sind, die Holzmassenaufnahme dann, wenn es sich um nur einigermaßen genaue Resultate handelt, nicht anders bewerkstelligt werden kann, als durch Bildung von Stärke-Höhenklassen.

Es ist ferner im §. 2 bereits angedeutet worden, daß in regelmäßig erzogenen Beständen sowohl die Höhe als die Reductionszahl innerhalb gewisser Grenzen Functionen der Stärke sind. Hätte nun die Function die Gestalt $p = P - c + \frac{G}{g} c$, so

wäre es einerlei, ob man den Holzmassengehalt eines ganzen Bestandes nach Stärkeklassenmodellstämmen oder aus dem mit der arithmetisch mittlern Kreisfläche versehenen Baum bestimmte.

Da letzteres Verfahren durch seine Einfachheit sich auszeichnet, indem es sowohl die Auswahl der Modellstämme, als insbesondere auch die Rechnung erleichtert, so ist die Beantwortung der Frage, inwiefern die obige Function stattfinde, von der größten Wichtigkeit für die Lehre von der Bestandsmassenaufnahme. Diese Frage kann aber nur auf dem Wege der Beobachtung gelöst werden, welchen wir nunmehr einschlagen wollen.

Aus einer größern Anzahl von Ertragsversuchen, welche uns vorliegen, haben wir sechszehn Stück ausgewählt, welche im Anhang mit allen für unsere Frage bemerkenswerthen Details abgedruckt sind. Wir haben die Producte $R.h = \frac{i}{gh}.h = \frac{i}{g}$ gebildet; sie finden sich in der letzten Spalte jeder Ertragstabelle aufgeführt.

Um zu erfahren, ob die Function stattfinde, verzeichneten wir die Richthöhen als Ordinaten auf die als Abscissen aufgetragenen zugehörigen Kreisflächen*). Mit Linien wurden die Endpunkte der Ordinaten verbunden**); der Zug jener gibt uns die Function an.

---

*) Wenn wir alle Curven in einem und demselben Maßstab aufgetragen hätten, so wären einige derselben so klein ausgefallen, daß dadurch die Deutlichkeit der Zeichnung gelitten hätte, andere aber wären größer geworden, als es der Raum dieser Schrift erlaubt. Wir haben daher, unbeschadet des Zweckes, die Maßstäbe willkürlich und so angenommen, daß sowohl sehr kleine, als sehr große Figuren vermieden werden konnten.

**) Eigentlich hätten diese Linien gekrümmt werden müssen, so daß eine stetige Curve entstanden wäre. Da aber die Krümmung sehr willkürlich ausgeführt werden konnte und wir dem Leser die unveränderte Mittheilung der Beobachtungswerthe schuldig zu sein glaubten, so haben wir die Endpunkte der Ordinaten durch gerade Linien in Verbindung gesetzt. Jedermann kann sich daraus die Beobachtungsfunction bilden, wie er für gut hält.

Da zur Bestimmung der Function $p = P - c + \frac{G}{g} c$ nur zwei Richthöhen (nämlich p und P) erforderlich sind, so ist es möglich, durch die aus den beobachteten Höhen und Reductionszahlen gebildete Function sehr viele ideale Curven zu legen, welche, je nachdem p und P, durch welche man sie gehen läßt, ausgewählt sind, mehr oder weniger mit der Beobachtungsfunction übereinstimmen. Um aber beurtheilen zu können, in wie weit letztere mit der idealen Function Aehnlichkeit hat, muß man die beiden Richthöhen so aussuchen, daß die Curven soviel als möglich sich nähern.

Um die concrete Gleichung für irgend einen Ertragsversuch zu erhalten, führt man also die beiden Werthe von $\frac{i}{g}$, welche wir durch p und P vorgestellt haben, und die zu denselben gehörenden Kreisflächen g und G in die allgemeine Gleichung $p = P - c + \frac{G}{g} c$ ein und bestimmt hieraus c. Es ist

$$c = \frac{(p - P)}{G - g} g.$$

Nun wird p als die Ordinate, g als die Abscisse des laufenden Punktes der Curve angenommen. P, c und G bleiben constante Größen; für ein jedes g, welches man in die Gleichung setzt, erhält man den entsprechenden Werth von p.

Wir haben, als wir die ideale Function eines jeden der 16 Ertragsversuche ermittelten, uns mit der Bestimmung von nur einigen Punkten begnügt. Der Lauf der Curve, deren Gleichung $p = P - c + \frac{G}{g} c$ ist, gestaltet sich so einfach, daß wenige Punkte hinreichen, um sie zu fixiren.

In der folgenden Zusammenstellung sind die Punkte angegeben, durch welche die Function gelegt wurde, sowie die berechneten Ordinatenwerthe, welche den Lauf der Curve noch näher bestimmen.

I. Katzenberg-Buchen.

$p = 36{,}5;\ P = 45{,}1;$

$g = 0{,}2166;\ G = 0{,}8405.$

Aus diesen Werthen ergibt sich

$c = -2{,}9857$; führt man dieses, sowie $P = 45{,}1$ und $G = 0{,}8405$ in die allgemeine Gleichung

$p = P - c + \frac{G}{g}\, c$ ein, so ist

$p = 45{,}1 + 2{,}9857 - \frac{0{,}8405}{g} \,.\, 2{,}9857$; hieraus

$p = 48{,}0857 - \frac{2{,}5094}{g}$; setzt man in diese Formel anstatt g nach und nach 0,4137; 1,1191; 1,6838, so ergibt sich die Ordinate p_{II} des zweiten Punktes $= 42{,}0198$; die Ordinate p_{V} des fünften Punktes $= 45{,}8433$; die Ordinate p_{VII} des siebenten Punktes $= 46{,}5954$.

II. Antrefferkopf-Buchen.

$p = 29.3;\ P = 36.0$

$g = 0{,}1345;\ G = 0.3922;$

$c = -3{,}4969;$

$p = 39{,}4969 - \frac{1.3715}{g}$

$p_{II} = 34.057,\ p_{VI} = 38.284,\ p_{VII} = 38{,}598.$

III. Langenbruch-Kiefern.

$p = 32{,}3;\ P = 39.9$

$g = 0.2813;\ G = 0{,}8149;$

$c = -4.0065;$

$$p = 43.906 - \frac{3{,}2649}{g}$$

$p_{II} = 35{,}875,\ p_{VI} = 41.466.$

IV. Kahlerberg-Buchen.

$p = 29.1;\ P = 37.6;$

$g = 0.2354;\ G = 1.0777;$

$c = -2.3755;$

$$p = 39.975 - \frac{2.5601}{g};$$

$p_{II} = 33{,}506;\ p_{III} = 35{,}659,\ p_{VI} = 38.186.$

V. Hundstieg-Kiefern.

$p = 38{,}2;\ P = 46{,}9;$

$g = 0{,}5801;\ G = 0{,}8614;$

$c = -17{,}941;$

$$p = 64{,}841 - \frac{15{,}455}{g}$$

$p_{III} = 51{,}249;\ p_{V} = 56{,}124.$

VI. Langenbruch-Fichten.

$p = 26{,}9;\ P = 43{,}0;$

$g = 0{,}1304;\ G = 0{,}3587$ (= der Kreisfläche des mittlern Modellstamms)

$c = -9{,}196;$

$$p = 52{,}196 - \frac{3.2986}{g};$$

$p_{IV} = 46{,}552,\ p_{V} = 48{,}319.$

VII. Neuesgeheeg-Buchen.

$p = 37{,}8;\ P = 48{,}1;$

$g = 0{,}2300;\ G = 1{,}1071;$

$$c = -2{,}7009$$

$$p = 50{,}8 - \frac{2{,}9902}{g};$$

$p_{II} = 43{,}2$, $p_{IV} = 47{,}3$, $p_{VI} = 48{,}7$.

VIII. Stamm-Buchen.

$p = 32{,}3$; $P = 38{,}0$

$g = 0{,}1184$, $G = 0{,}3993$;

$c = -2{,}4037$;

$$p = 40{,}4037 - \frac{0{,}95979}{g}$$

$p_{IV} = 38{,}785$, $p_{V} = 39{,}262$.

IX. Ammenhäuserhecke-Buchen.

$p = 34{,}4$; $P = 56{,}0$;

$g = 0{,}4101$, $G = 1{,}0894$;

$c = -13{,}04$

$$p = 69{,}04 - \frac{14 . 205}{g}$$

$p_{III} = 52{,}035$, $p_{V} = 59{,}249$, $p_{VI} = 61{,}575$, $p_{VII} = 62{,}563$.

X. Viehberg-Kiefern.

$p = 21{,}8$; $P = 27{,}64$;

$g = 0{,}1243$; $G = 0{,}2437$;

$c = -6{,}0796$;

$$p = 33{,}7196 - \frac{1 . 4816}{g};$$

$p_{III} = 30{,}04$; $p_{IV} = 31{,}26$.

XI. Lemberg-Buchen.

$p = 30{,}0$; $P = 38{,}7$;

$g = 0{,}1472$; $G = 0{,}4065$;

$c = -4{,}9388$;

$$p = 43{,}64 - \frac{2{,}0076}{g};$$

$p_{IV} = 40{,}35$; $p_{V} = 41{,}21$; $p_{VI} = 42{,}81$.

XII. Fräuleinshang-Lärchen.

$p = 25{,}4$; $P = 32{,}5$;

$g = 0.0497$; $G = 0{,}3993$;

$c = 1{,}0093$;

$$p = 33{,}509 - \frac{0.40304}{g};$$

$p_{II} = 30{,}267$; $p_{III} = 31.836$.

XIII. Hainstruth-Kiefern.

$p = 23{,}0$; $P = 28{,}4$;

$g = 0{,}1387$; $G = 0.5801$;

$c = -1{,}6968$;

$$p = 30.097 - \frac{0{,}98433}{g};$$

$p_{III} = 27{,}632$, $p_{V} = 28{,}858$.

XIV. Eichwald-Buchen.

$p = 33{,}8$; $P = 56{,}8$;

$g = 0{,}2521$; $G = 0{,}8405$;

$c = -9{,}854$;

$$p = 66{,}65 - \frac{8{,}2826}{g};$$

$p_{II} = 46{,}798$; $p_{VI} = 61{,}15$.

XV. Steinberg-Kiefern.

$p = 25{,}8$; $P = 35{,}8$;

$g = 0{,}2607$; $G = 0{,}6150$;

$c = -7{,}3581$;

$$p = 43,1581 - \frac{4,5253}{g};$$

$$p_{II} = 33,45; \; p_{IV} = 38,62; \; p_{VI} = 39,86.$$

XVI. Kirchgeheeg-Buchen.

$$p = 31,6; \; P = 43,5;$$

$$g = 0,2665; \; G = 0,5974;$$

$$c = -9,5840;$$

$$p = 53,084 - \frac{5,7255}{g};$$

$$p_{II} = 38,22; \; p_{V} = 47,73; \; p_{VI} = 49,19.$$

Aus der Vergleichung der Beobachtungs- und der idealen Curven, welche auf den im Anhang befindlichen Tabellen verzeichnet sind, geht nun hervor, daß zwar innerhalb gewisser Grenzen die Function $p = P - c + \frac{G}{g} c$ stattfindet, daß aber der Unterschied beider Functionen mitunter noch erheblich genug ist, um ansehnliche Differenzen zwischen dem nach der arithmetisch mittlern Kreisfläche berechneten und dem aus den einzelnen Klassenstämmen bestimmten Holzmassengehalt eines und desselben Bestandes hervorzubringen.

In mehrern Fällen stimmt die beobachtete Function sehr wohl mit der idealen überein, wie z. B. bei Kirchgeheeg und Katzenberg; einige Male ist auch der nach beiden Verfahren berechnete Holzmassengehalt nahe derselbe, ohne daß die Curven zusammenfielen (wie z. B. bei der Probefläche Antrefferkopf). Hier sind offenbar zufällige, von der Function unabhängige, Ausgleichungen im Spiele. Ueberall da, wo die Herleitung der Holzmasse aus dem nach der arithmetisch mittlern Kreisfläche ausgewählten Modellstamm einen bedeutenden Fehler zur Folge hat, zeigen uns aber auch die Differenzen der Curven dieses

Resultat schon an. So z. B. bei Langenbruch (Fichten). Der Fehler beträgt nahe an 11 Prozente. Die Curven gehen hier aber auch sehr weit auseinander.

Um den Werth des in Frage stehenden Verfahrens zur Holzmassenermittlung beurtheilen zu können, wollen wir eine Uebersicht des durch Anwendung desselben erhaltenen Fehlers geben.

Letzterer beläuft sich

I.	Für Katzenberg (Buchen)	auf	....	0.86 %
II.	„ Antrefferkopf „	„	....	0.047 „
III.	„ Langenbruch (Kiefern)	„	....	4.08 „
IV.	„ Kahlerberg (Buchen)	„	....	2.00 „
V.	„ Hundsieg (Kiefern)	„	....	2.23 „
VI.	„ Langenbruch (Fichten)	„	....	10.80 „
VII.	„ Neuesgeheeg (Buchen)	„	....	1.52 „
VIII.	„ Stamm „	„	....	2.45 „
IX.	„ Ammenhäuserhecke „	„	....	5.71 „
X.	„ Viehberg (Kiefern)	„	....	4.74 „
XI.	„ Lemberg (Buchen)	„	....	1.81 „
XII.	„ Fräuleinshang (Lärchen)	„	....	1.58 „
XIII.	„ Hainstruth (Kiefern)	„	....	3.92 „
XIV.	„ Eichwald (Buchen)	„	....	4.52 „
XV.	„ Steinberg (Kiefern)	„	....	4.13 „
XVI.	„ Kirchgeheeg (Buchen)	„	....	0.89 „

Uebrigens soll nicht verkannt werden, daß auf allen denjenigen Probeflächen, für welche die beiden Curven die größte Uebereinstimmung zeigen, auch der Holzwuchs am regelmäßigsten war. Ueberall da, wo die Curven größere Abweichungen aufweisen, waren die Bestände nicht normal, sie enthielten größere oder kleinere Lücken oder eingewachsene Oberständer, deren

bedeutende Vollholzigkeit ein verhältnißmäßig großes $\frac{i}{g}$ ergeben mußte.

Will man aber völlig darüber versichert sein, daß die Holzmassenaufnahme das genaueste Resultat liefere, wie solches z. B. bei forststatischen Untersuchungen verlangt wird, so darf, selbst in geschlossenen, wüchsigen und regelrecht erzogenen Beständen die Holzmasse niemals aus einem*) nach der arithmetisch mittlern Kreisfläche ausgewählten Modellstamm bestimmt werden, sondern es müssen zu dem Ende aus jeder Stärkeklasse Probestämme gefällt und vermessen werden.

Dagegen ist es hier nicht nöthig, besondere Höhenklassen zu bilden. In regelmäßig erzogenen, geschlossenen Waldungen ist immer die Höhe eine Function der Stärke; zur Klassification der Stämme nach ihren Längen reicht also die Unterscheidung nach Stärken hin, d. h., in den Stärkeklassen sind zugleich die Höheklassen ausgeprägt.

Bei größern Taxationen muß man ohnedies für geschlossene Bestände auf die Bildung von Höheklassen geradezu Verzicht leisten, wenn auch hieraus ein Fehler entspringen sollte. Es ist nicht möglich, die Höhe eines jeden Stamms zu messen, ohne das Geschäft der Ertragsregelung übermäßig in die Länge zu ziehen und so zu vertheuern, daß es vortheilhafter für den Waldbesitzer gewesen sein würde, wenn man es ganz unterlassen hätte.

---

*) Auch mehrere Modellstämme, aus deren Inhalt man das Mittel nimmt, machen das Resultat nicht viel genauer, weil auch in diesem Mittel die Function sich nicht verläugnet.

§. 8.

Die Ansichten der Forstschriftsteller darüber, ob die Holzmassen nach Probeflächen, oder durch Aufnahme der Bestände in ihrer ganzen Ausdehnung zu ermitteln seien, sind getheilt. In neuerer Zeit hat man die Probeflächen vielfach verworfen, während ihnen früher von bedeutenden Autoritäten das Wort geredet wurde.

Denken wir uns, sämmtliche Stämme eines Bestandes über die Fläche F gleichmäßig und so vertheilt, daß auf dem kleinsten Flächenstückchen alle Stärkeklassen in dem nämlichen Verhältniß, wie auf F, vertreten seien, so wäre es nicht nöthig, die Stärken aller Stämme zu messen, um die mittlere Kreisfläche oder die Kreisflächensumme jeder Klasse zu erfahren. Es genügte, die Aufnahme der Stärken auf einer kleinern Fläche f zu machen; aus der auf f befindlichen Holzmasse i, reducirt auf die Flächeneinheit und multiplicirt durch F, ließe sich dann die Holzmasse J des ganzen Bestandes ableiten. Es ist

$$i \cdot \frac{F}{f} = J.$$

Da die Bäume einen gewissen, mitunter verhältnißmäßig bedeutenden Raum einnehmen, so kann nicht die kleinste Fläche f als Probefläche dienen. Man muß derselben wenigstens eine solche Ausdehnung geben, daß auf ihr alle Stärkeklassen mit einer so großen Anzahl von Stämmen aller Stärken vorhanden sind, daß $i = J \cdot \frac{f}{F}$ sein kann.

Je dichter nun die Bestände bestockt sind (also, unter sonst gleichen Umständen, je jünger sie sind), um so kleiner darf die Fläche f genommen werden, deren Holzbestand als das Modell von J erscheinen soll. In einem gleichförmig bestandenen Gerten-

holz kann deßhalb oft $1/4$ Morgen als Probefläche genügen, während in einem Vorbereitungsschlag die achtfache Fläche nöthig ist, um alle Stärkeklassen repräsentirt zu sehen in dem Verhältniß von $\frac{f}{F}$.

Die Größe der Probefläche hängt also zunächst ab von der Dichtheit der Bestockung. Die Probefläche kann unter sonst gleichen Umständen kleiner genommen werden in jüngern, als in ältern Beständen.

Uebrigens sind sehr kleine Probeflächen, wenn auch auf ihnen alle Stammklassen in dem nämlichen Verhältniß, wie im ganzen Bestande, vertreten wären, nicht zu empfehlen. Es fällt immer eine Anzahl von Stämmen in die Umfangslinien; man ist nun in Verlegenheit, ob man jene der Probefläche zutheilen oder von ihr ausscheiden soll. In beiden Fällen ist ein Fehler unvermeidlich. Dieser wird aber, da das Verhältniß des Umfangs zweier ähnlicher Figuren zu ihren Inhalten um so kleiner wird, je größer dieser Inhalt ist, vermindert, wenn man der Fläche eine größere Ausdehnung gibt. Dabei versteht sich von selbst, daß die Probefläche eine Figur bilden muß, welche auf einen verhältnißmäßig kleinen Umfang einen großen Inhalt besitzt. (Also, da der Kreis zu schwierig herzustellen ist, ein Quadrat oder ein von demselben nicht zu sehr abweichendes Parallelogramm).

Sind die Stämme nicht gleichmäßig über die Fläche vertheilt, so läßt sich dennoch eine Probefläche legen. Nur muß man sie so auswählen, daß der Bedingnißgleichung $i = J . \frac{f}{F}$ Genüge geleistet wird.

Viele haben die Ueberzeugung, es müsse f recht groß genommen werden, weil man dann um so versicherter darüber sein könne, daß die auf ihm befindliche Kreisflächensumme der Stämme wirklich der $\frac{f}{F}$te Theil der Kreisflächensumme aller über F verbreiteten Stämme sei. Diese Ansicht läßt sich nicht mathematisch begründen. Es scheint sogar, daß kleinere Probeflächen wegen der Uebersichtlichkeit, die sie gewähren, eher dem beregten Zweck entsprechen, als größere.

Neuerdings ist von mehreren Seiten die Vorschrift gegeben worden, die Bestände in ihrer ganzen Ausdehnung aufzunehmen, also f = F zu machen, d. h., den ganzen Bestand als eine Probefläche anzusehen. Diese Maßnahme kann offenbar weiter nichts nützen, als daß man die Kreisflächensumme der Stärkeklassen sehr genau erfährt; ist aber der Bestand aus verschiedenen Bonitäten zusammengesetzt, welche die Höhen- und Vollholzigkeitsfunction merklich abändern, und werden nicht auch Höheklassen gebildet, so leistet das Messen der Stärken aller Stämme gar keine Dienste, ja es ist denkbar, daß in diesem Falle mittelst einer Probefläche ein richtigeres Resultat sich erzielen lasse.

Die Kreisflächensumme einer Klasse ist nicht der einzige Factor ihres Holzgehaltes; Höhe und Vollholzigkeit bestimmen denselben eben so sehr.

Wenn die Höhen der Bäume nicht über die ganze Fläche hin die nämlichen Functionen der Stärken sind und man, trotz diesem Umstand, blos nach Durchmessern oder Umfängen klassificirt, so werden in eine Stärkeklasse Bäume von den abweichendsten Höhen vereinigt. Nun hängt es ganz vom Zufall ab, ob man bei der Auswahl der Modellstämme Bäume von der mittlern Höhe der Klasse, oder kürzere oder längere Exemplare bekommt. Es hält äußerst schwer, das wahre Modell einer Klasse zu treffen,

indem man oft gar kein Bild von demselben hat. Dies gilt ganz besonders von den am schwächsten vertretenen (also den höchsten und niedrigsten) Stärkeklassen, weil die in dieselben fallenden Bäume oft weit von einander entfernt stehen und deßhalb nicht gehörig in Bezug auf ihre Höhen verglichen werden können. Ueberdies ist die mittlere Höhe gar nicht das arithmetische Mittel aus den Höhen aller Stämme einer Klasse, sondern eine ganz andere, welche durch die von den Höhen befolgte Function bestimmt wird. Diese Function richtig zu erkennen und dann die Berechnung der Längendimension des Modellstammes im Kopfe zu führen, ist eine Aufgabe, die der geübteste Praktiker zu lösen nicht im Stande ist.

Die Holzmassenaufnahme eines Bestandes, welcher aus verschiedenen, die Höhe- und Vollholzigkeits-Function abändernden, Bonitäten zusammengesetzt ist, darf demnach, wenn diese Abänderungen bedeutend sind, niemals in der Weise stattfinden, daß man den Bestand als ein Ganzes betrachtet (und also alle Stämme von gleicher Stärke in eine Klasse vereinigt). Es müssen vielmehr die Bonitäten getrennt behandelt werden.

Innerhalb jeder Bonität können nun wieder Probeflächen gelegt werden. Handelt es sich um genauere Kenntniß der Kreisflächen, so mißt man die Stärken aller Stämme, sieht also, wie vorhin schon bemerkt wurde, die Totalfläche jeder Bonität als eine Probefläche an.

Um ein Beispiel von der Anwendung der eben aufgestellten Regel zu geben, wollen wir die Methode der Massenbestimmung solcher Bestände betrachten, welche an Bergwänden hinziehen. Hier nehmen gewöhnlich die Höhen vom Fuße nach dem Rücken der Wand hin ab. Wir ermitteln die Holzmasse, indem wir den Bestand in Streifen zerlegen, welche eine solche Breite besitzen, daß innerhalb derselben die Baumhöhen nahezu sich

gleich bleiben*). Diese Streifen werden nun gesondert aufgenommen.

Es ist schon vor längerer Zeit der Vorschlag gemacht worden, in unregelmäßig bestandenen Waldungen die Probeflächen in Form von Streifen durch alle Bonitäten hindurchzulegen, so daß jede der Letztern einen ihrer Größe proportionalen Theil des Streifens einnimmt. Dieses Verfahren würde dann zum Ziele führen, wenn es gelänge, die Holzmasse auf einem solchen Streifen genau zu bestimmen. Dazu müßte aber dieser selbst wieder nach Bonitäten zerlegt werden, um auf jeder derselben eine gesonderte Holzmassenaufnahme zu bewerkstelligen. Man kommt nun zu dem nämlichen Resultat, wenn jede Bonität des Waldes für sich betrachtet und ihr Holzgehalt entweder mittelst Probeflächen oder durch Messen der Stärke aller Stämme aufgenommen wird. Entscheidet man sich für Probeflächen, so muß freilich die Größe des Flächenantheils jeder Bonität bekannt sein. Allein diese muß man auch wissen, um den Probestreifen die verhältnißmäßige Figur geben zu können. Die Holzmassenaufnahme mittelst Probestreifen findet daher auf einem unnützen und höchst unpraktischen Umweg statt, den man verlassen sollte.

§. 9.

Wir haben gesehen, daß die Reductionszahlen, wenn sie constant sind, oder auch allgemein für die Function $y = Y - c + \frac{G}{g} c$, sich streichen; man nimmt hierbei an, daß die wirkliche Reductionszahl in Rechnung gezogen sei. Diese ergibt sich aber, wenn man die unten an der Erde befindliche Kreisfläche mit der Totalhöhe H multiplicirt und in den Bauminhalt i dividirt.

*) Es hängt von dem gewünschten Grad der Genauigkeit ab, ob man die Streifen breiter oder schmäler machen soll.

Man kann die Kreisfläche übrigens auch in einer andern beliebigen Höhe h vom Boden abgreifen, nur muß alsdann $\frac{H}{h}$ constant sein, das heißt, es muß, wenn R, R′ die Reductionszahlen zweier Stämme, G, G′ die Querschnitte dicht über dem Stock, g, g′ die Querschnitte, gemessen in den Höhen h, h′ vom Boden, H, H′ die Totalhöhen, r, r′ die Reductionszahlen, berechnet für die Querschnitte g, g′, vorstellen, die Gleichung

$$\frac{R}{R'} = \frac{r}{r'}$$

bestehen. Es ist also:

$$\frac{i}{HG} : \frac{i'}{H'G'} = \frac{i}{Hg} : \frac{i'}{H'g'}, \text{ woraus } \frac{H'G'}{HG} = \frac{H'g'}{Hg}$$

Nun ist für die Parabel

$$G : g = \sqrt{2pH} : \sqrt{2p(H-h)}, \; g = G\sqrt{\frac{H-h}{H}}, \; g'\sqrt{\frac{H'-h'}{H'}};$$

$$gH = GH\sqrt{\frac{H-h}{H}}; \; g'H' = G'H'\sqrt{\frac{H'-h'}{H'}};$$

Es sei $\frac{H}{k} = h$, $\frac{H'}{k'} = h'$, so ist

$$\frac{G'H'}{GH} = \frac{G'H'\sqrt{\frac{k'-1}{k'}}}{GH\sqrt{\frac{k-1}{k}}}; \; 1 = \frac{\sqrt{\frac{k'-1}{k'}}}{\sqrt{\frac{k-1}{k}}};$$

$$\sqrt{\frac{k'-1}{k'}} = \sqrt{\frac{k-1}{k}}; \; \frac{k'-1}{k'} = \frac{k-1}{k};$$

$$kk' - k = k'k - k'; \; k = k';$$

das Nämliche findet man für den gemeinen Kegel.

Es muß also $k = k' = k'' \ldots$ constant sein, d. h. man muß die Stammkreisflächen immer in einem der Gesammthöhe proportionalen Abstand vom Boden abgreifen, damit die Reductionszahlen in dem nämlichen Verhältniß zu einander verbleiben.

Smalian nimmt bekanntlich $k = 20$ an; man soll also die Diameter oder die Umfänge stets in $1/_{20}$ der Höhe messen; es ist wirklich gar kein Grund vorhanden, k gerade auf 20 festzusetzen. Offenbar richtet sich diese Constante nach der Höhe der Bäume. Wären in einem Bestande Stämme von 140 Fuß Höhe vorhanden, wie es deren gibt, so müßte Smalian in $^{140}/_{20} = 7$ Fuß Höhe messen, was ihm sehr schwer fallen dürfte. Sind dagegen die Stämme nur 20 Fuß hoch, so wäre $\frac{H}{k} = \frac{20}{20} = 1$ Fuß; man müßte sich also bücken, um die Kluppe oder das Meßband anzulegen.

Viele Forstleute sind der Vorschrift Smalian's ohne Weiteres gefolgt, ohne zu überlegen, worauf dieselbe beruhe. Sie kleben an der starren Form; sie wissen nicht, warum überhaupt in einem aliquoten Theil der Höhe vom Boden gemessen werden soll; sie halten deßhalb, lediglich auf die Autorität Smalian's hin, genau an $k = 20$ fest. Wir haben gefunden, daß in einem ungleich hohen Bestand die Stämme nicht in gleichem Abstand vom Boden gemessen werden dürfen, daß dieser Abstand proportional der Höhe sein muß; aber wir haben für k keinen bestimmten Zahlenwerth erhalten. Wir können k so groß oder so klein annehmen, als wir nur wollen, nur muß es für eine und dieselbe Aufnahme das nämliche bleiben. Man kann sich k ganz und gar nach seiner Bequemlichkeit einrichten. Dies ist aber nicht der Fall, wenn man es stets $= 20$ annimmt. Der Verfasser hat vor nicht langer Zeit gesehen, daß ein Forstbeamter in einem 35 Fuß hohen

Kiefernbestande in $1/_{20}$ Höhe, also in $1^1/_2$ Fuß über dem Boden die Durchmesser abgriff. Die Höhe des höchsten Baumes betrug 40 Fuß. Hier hätte doch, unbeschadet des Zweckes, $k = 10$ statt 20 angenommen werden können. Dann würden die Bäume in $3^1/_2 - 4$ Fuß Höhe gemessen worden sein, was offenbar nicht so mühsam und anstrengend ist, als das Herabbücken bis zu $1^1/_2$ Fußen.

Obgleich es, vom rein mathematischen Standpunkt betrachtet, ganz einerlei erscheint, welcher Werth k gegeben wird, so ist es doch nicht vortheilhaft, k groß anzunehmen, weil dann der Punkt, an dem man den Durchmesser abgreift, zu nahe am Boden zu liegen kommt und hier die Bäume den unregelmäßigsten Querschnitt besitzen. Die Tagwurzeln ziehen sich nämlich als Strünke am Stamm in die Höhe und bleiben auf einige Entfernung hin noch sichtbar. Weiter nach oben hin verschwinden sie und der Stamm nimmt eine regelmäßigere (kreisförmige, elliptische oder ovale) Form im Querschnitt an. Smalian ist gewiß im Irrthum, wenn er meint, erst in $\frac{H}{20}$ finde ein regelmäßiger Wuchs statt*).

Nur dann, wenn die Reductionszahlen Functionen der Kreisfläche sind, empfiehlt es sich, die Stämme in $\frac{H}{k}$ zu messen, weil nur in diesem Fall zu erwarten steht, daß die Reductionszahlen sich gegenseitig in der Gleichung $ghRa + g'h'R'a' + \ldots = AgḫR$ aufheben. Ist aber die Vollholzigkeit unabhängig von dem Querschnitt, so müssen ja doch Klassen nach Stärken und Höhen gemacht werden; es wird also angenommen, nur innerhalb jeder Stärke-Höhenklasse sei die Reductionszahl constant. Da aber,

*) Smalian: Anleitung zur Untersuchung und Feststellung des Waldzustandes, der Forsteinrichtung, des Ertrags und Geldwerths der Forste. Berlin 1840.

wie vorausgesetzt, alle Stämme in einer solchen gleiche Höhe besitzen sollen, so werden sie auch sämmtlich in $\frac{H}{k}$ gemessen. Man kann nun jede Klasse in einer andern Höhe vom Boden messen. Nur muß innerhalb jeder Klasse diese Höhe die nämliche bleiben.

Praktisch ist die Messung in $\frac{H}{k}$ kaum ausführbar, zum Wenigsten bei größern Taxationen. Welche Umständlichkeit würde es in der That verursachen, wenn man die Höhe jedes Baumes erst messen, dann dieselbe durch k dividiren und nun weiter den Abstand $\frac{H}{k}$ vom Boden abgreifen wollte? Mit bloßem Schätzen von H und $\frac{H}{k}$ reicht man aber hier nicht aus, denn dieses ist nicht zuverlässig genug und es können dabei größere Fehler sich einstellen, als wenn man alle Bäume in einer constanten Entfernung vom Boden, z. B. in Brusthöhe mißt.

Ist die Höhe der höchsten und niedrigsten Baumklasse nicht zu sehr unterschieden, so wird der Fehler auch nicht so bedeutend ausfallen.

Nimmt man z. B. an, die Baumform sei die der apollonischen Parabel, so ist, wenn

$$y^2 = 2px, \; y'^2 = 2p(x + d),$$
$$y'^2 - y^2 = 2pd;$$

wäre nun x die richtige Höhe, in welcher die Stärke gemessen werden sollte, so ist die Verhältnißmäßigkeit des Fehlers durch $\frac{2pd}{2px} = \frac{d}{x}$ ausgedrückt; sollte dagegen eigentlich in $x + d$ gemessen werden, so hat man

$$\frac{2pd}{2p(x+d)} = \frac{d}{x+d}$$

Es sei $x = 80$, $d = 1$, so ist

$$\frac{d}{x} = \frac{1}{80}, \quad \frac{d}{x+d} = \frac{1}{81}.$$

Sind die Höhenunterschiede bedeutend, so kann freilich der Fehler auch größer ausfallen. Allein in diesem Falle liefert, wie wir gesehen haben, die Berechnung des Holzgehaltes aus dem nach der arithmetisch mittlern Kreisfläche bestimmten Stamm kein richtiges Resultat. Es müssen Klassen gebildet werden und dann ist es nicht mehr nöthig, die Stärken aller Bäume in $\frac{H}{k}$ zu messen.

§. 10.

Es ist hier der Ort, auf ein fehlerhaftes Verfahren aufmerksam zu machen, welches nicht selten zur Bestimmung des mittlern Modellstamms angewendet und erst vor Kurzem wieder in einer Taxationsinstruction als Norm aufgestellt worden ist. Nach diesem Verfahren wird die Stärke des Modellstamms dadurch berechnet, daß die Summe der Durchmesser aller Stämme durch die Gesammtstammzahl dividirt wird.

Nur aus einem falschen Begriff von der arithmetischen Mittlern konnte eine Vorschrift, wie die eben angeführte, entspringen.

Es ist im §. 2 nachgewiesen worden, daß für die Function $p = P - c + \frac{G}{g} c$ der mit der arithmetisch mittlern Kreisfläche g versehene Stamm das wahre Mittel aus allen Stämmen eines Bestandes sei. Wir fanden

$$g = \frac{ag + a'g' + a''g'' + \ldots.}{a + a' + a'' + \ldots.},$$

wobei a, a', a''.... die Stammzahlen, g, g', g''.... die den Klassenstärken entsprechenden Kreisflächen bedeuteten.

Die Formel für g entspringt aus der gleichfalls früher schon aufgestellten Gleichung, wonach der Massengehalt des ganzen Bestandes, berechnet aus Klassenmodellstämmen, gleich sein soll dem nämlichen Holzgehalt, berechnet aus einem nach der arithmetisch mittlern Kreisfläche ausgewählten Modellstamm. Diese Methode zu Ermittlung der Stärke des Modellstamms besitzt eine mathematische Begründung, welche der obenangeführten, von uns als fehlerhaft bezeichneten, mangelt.

Nach letzterer wäre der Halbmesser des mittlern Modellstamms

$$\varrho = \frac{ar + a'r' + a''r'' + \ldots.}{a + a' + a'' + \ldots.}$$

Dieser Halbmesser wird immer kleiner sein, als derjenige, welcher für g sich berechnet. Es ist nämlich die zu ϱ gehörige Kreisfläche =

$$\pi\varrho^2 = \pi \left(\frac{ar + a'r' + a''r'' + \ldots.}{a + a' + a'' + \ldots.}\right)^2$$

Bilden wir die Differenz zwischen g und $\pi\varrho^2$, so ist

$$g - \pi\varrho^2 = \pi\left(\frac{ar^2 + a'r'^2 + a''r''^2 + \ldots.}{a + a' + a'' + \ldots.}\right) - \pi\left(\frac{ar + a'r' + a''r'' + \ldots.}{a + a' + a'' + \ldots.}\right)^2$$

$$= \frac{\pi}{a + a' + a'' + \ldots.}\Big[(ar^2 + a'r'^2 + a''r''^2 + \ldots.)(a + a' + a'' + \ldots.) - (ar + a'r' + a''r'' + \ldots.)^2\Big]$$

Nun ist

$$(ar^2 + a'r'^2 + a''r''^2 + \ldots.)(a + a' + a'' + \ldots.) =$$
$$= a^2r^2 + a'^2r'^2 + a''^2r''^2 + a'''^2r'''^2 + \ldots.$$
$$+ aa'(r^2 + r'^2) + aa''(r^2 + r''^2) + aa'''(r^2 + r'''^2) + \ldots.$$

$+ a'a''(r'^2 + r''^2) + a'a'''(r'^2 + r'''^2) + \ldots$

$+ a''a'''(r''^2 + r'''^2) + \ldots$

Ferner ist

$(ar + a'r' + a''r'' + a'''r''' + \ldots)^2 =$

$= a^2r^2 + a'^2r'^2 + a''^2r''^2 + a'''^2r'''^2 + \ldots$

$+ 2aa'rr' + 2aa''rr'' + 2aa'''rr''' + \ldots + 2a'a''r'r'' + 2a'a'''r'r'''$

$+ \ldots + 2a''a'''r''r''' + \ldots$

daher

$$g - \pi\varrho^2 = \frac{\pi}{a + a' + a'' + \ldots}\Big[aa'(r^2 - 2rr' + r'^2) + aa''(r^2 - 2rr'' + r''^2)$$

$$+ aa'''(r^2 - 2rr''' + r'''^2) + \ldots + a'a''(r'^2 - 2r'r'' + r''^2)$$

$$+ a'a'''(r'^2 - 2r'r''' + r'''^2) + \ldots + a''r'''(r''^2 - 2r''r''' + r'''^2) + \ldots\Big]$$

$$= \frac{\pi}{a + a' + a'' + \ldots}\Big[aa'(r - r')^2 + aa''(r - r'')^2 + aa'''(r - r''')^2 + \ldots$$

$$+ a'a''(r' - r'')^2 + a'a'''(r' - r''')^2 + \ldots + a''a'''(r'' - r''')^2 + \ldots$$

Die Ausdrücke $(r - r')^2$, $(r - r'')^2$, $(r - r''')^2$, $(r' - r'')^2$, $(r' - r''')^2$, $(r'' - r''')^2 \ldots$ sind alle wesentlich positiv, weil sowohl etwas Positives, als etwas Negatives, zum Quadrat erhoben, etwas Positives gibt. Die Differenz $g - \pi\varrho^2$ ist demnach positiv, also ist

g größer als $\pi\varrho^2$.

Hierüber ein Beispiel. Es seien 9 Durchmesserklassen gebildet worden; der Einfachheit halber wollen wir annehmen, jede Klasse enthalte nur einen Stamm.

Durchmesser	4	5	6	7	8
Kreisflächen	0.12567	0,19635	0,28274	0,38485	0.50265
Durchmesser	9	10	11	12	
Kreisflächen	0.63618	0,78540	0,95033	1,13100	

Die Summe sämmtlicher Kreisflächen beträgt 4.99517, diese

dividirt durch die Stammzahl, gibt $\frac{4.99517}{9} = 0.55502$. Die Summe der Durchmesser, dividirt durch die Anzahl der Stämme, ist $= \frac{72}{9} = 8$, wozu eine Kreisfläche von 0.50265 □Fußen gehört. Der Fehler $g - \pi\varrho^2$ ist $= 0.55502 - 0.50265 = 0.05247$; dies macht mehr als 9 Prozente.

Aus der Differenzengleichung zwischen g und $\pi\varrho^2$ geht hervor, daß der Fehler, den man durch Bestimmung des mittlern Modellstamms aus der Summe der Halbmesser, anstatt aus der Kreisflächensumme aller Stämme, begeht, um so bedeutender ist, je größer die Unterschiede $r - r'$, $r - r''$, $r - r'''$, $r' - r''$.... sind. Je weiter also die Abstände der Durchmesserklassen von einander liegen, um so mehr wird die daraus abgeleitete falsche mittlere Kreisfläche $\pi\varrho^2$ von der wahren g abweichen.

§. 11.

Zur Vermeidung allzuvieler Einträge und Berechnungen wird nicht die wirkliche Stärke (Durchmesser oder Umfang) eines jeden Stammes aufgenommen. Man bringt die Stämme in Klassen, welche dadurch gebildet werden, daß man die Stärken um eine gewisse Größe steigen läßt. Der Durchmesser des dicksten im Bestand vorkommenden Stammes sei $= r_n$, der Durchmesser des dünnsten Stammes $= r_1$, der Unterschied der Klassenstärken $= d$, so ist die Anzahl N der Klassen $= \frac{r_n - r_1}{d} + 1$. Es ergeben sich also um so weniger Klassen, je größer d ist.

Angenommen, man habe die Klassen r_1, r_2, r_3.... gemacht; es sei $r_1 - r = r_2 - r_1 = r_3 - r_2 = ... = 1$, so

fallen alle diejenigen Stämme, deren Halbmesser zwischen $r_1 + \frac{1}{2}$ und $r_2 + \frac{1}{2}$ liegt, der Klasse r_2, alle Stämme zwischen $r_2 + \frac{1}{2}$ und $r_3 + \frac{1}{2}$ der Klasse r_3 zu und so fort. Gewöhnlich wird unterstellt, der durch diese Manipulation begangene Fehler hebe sich auf, wenn ebensoviele Stämme über, als unter dem Klassendurchmesser liegen; diese Ansicht ist nicht richtig. Eine Ausgleichung würde nur dann stattfinden, wenn die Holzgehalte der Klassen proportional mit den Durchmessern oder Umfängen zunähmen; sie wachsen aber im quadratischen Verhältniß dieser Dimensionen.

Gesetzt, es seien a Stämme, ein jeder mit dem Halbmesser $r + c$, a' Stämme mit dem Halbmesser $r - c$ vorhanden, so muß, wenn die Masse dieser Stämme zusammengenommen, gerade so groß sein soll, als diejenige ist, welche sich für die nämliche Stammzahl und den Halbmesser r berechnet, die Gleichung bestehen

$$a\pi(r + c)^2 + a'\pi(r - c)^2 = (a + a')\pi r^2, \text{ oder}$$
$$a(r + c)^2 + a'(r - c)^2 = (a + a')r^2, \text{ hieraus}$$
$$ar^2 + 2arc + ac^2 + a'r^2 - 2a'rc + a'c^2 = ar^2 + a'r^2;$$
$$2arc + ac^2 - 2a'rc + a'c^2 = 0;$$
$$a(2rc + c^2) - a'(2rc - c^2) = 0;$$
$$a(2rc + c^2) = a'(2rc - c^2);$$
$$\frac{a'}{a} = \frac{2rc + c^2}{2rc - c^2} = \frac{2r + c}{2r - c};$$

das heißt: Wenn der Fehler sich ausgleichen soll, so muß die Stammzahl, welche zu dem kleinern Durchmesser gehört, eben so viel mal größer sein, als die Stammzahl, welche zu dem größern Durchmesser gehört, als der Durchmesser, vermindert um c, enthalten ist in dem Durchmesser, vermehrt um c.

Ist aber die Differenz c' zwischen dem kleinern und dem mittlern Durchmesser nicht dieselbe, als die Differenz zwischen dem größern und dem mittlern Durchmesser, so hat man

$$\frac{a'}{a} = \frac{2rc + c^2}{2rc' - c'^2} = \frac{c}{c'}\left(\frac{2r + c}{2r - c'}\right)$$

Es muß also die Anzahl a' der Stämme mit dem kleinern Durchmesser um so viel mal steigen, je größer c gegen c' ist, damit die vorstehende Gleichung ihren Werth behält.

Denkt man sich, die Durchmesser der Stämme, welche einer Klasse mit dem mittlern Halbmesser r angehören, bildeten eine arithmetische Reihe, deren erstes und letztes Glied $r - c$ und $r + c$ wäre, und nimmt man weiter an, es sei für jeden Posten dieser Reihe ein Stamm vorhanden, so liefert die Subsummirung aller dieser Stämme in eine einzige Klasse r ein zu niederes Resultat; d. h. die Masse sämmtlicher Stämme, berechnet aus ihren wirklichen Durchmessern, ist größer als diejenige, welche sich aus der Multiplication des Inhaltes eines mit dem Halbmesser r behafteten Stammes in die Anzahl der Stämme ergibt.

Selten findet sich diese Reihe im Walde vor; es können deßhalb auch Fälle vorkommen, in denen Stammzahl und Durchmesser in der Art combinirt sind, daß der Fehler sich aufhebt.

Welchen Abstand soll man nun den einzelnen Klassen geben?

Es seien 2 Stämme, einer mit dem Halbmesser $r - c$, der andere mit dem Halbmesser $r + c$; die Höhe h und die Reductionszahl beider Stämme sei dieselbe.

Der wirkliche Inhalt J der zwei Stämme drückt sich aus durch

$$J = \pi hR\,(r - c)^2 + \pi hR\,(r + c)^2$$
$$= \pi hR\,(r^2 - 2rc + c^2 + r^2 + 2rc + c^2)$$
$$= 2\pi hR\,(r^2 + c^2);$$

wird aber der Inhalt i der beiden Stämme mit dem Halbmesser r berechnet, so ist

$i = 2\pi hRr^2$, also

$$J - i = 2\pi hR\,(r^2 + c^2 - r^2) = 2\pi hRc^2$$

Der Unterschied beider Berechnungsarten wächst also mit dem Quadrat von c. Die Holzmassenaufnahme gibt demnach ein um so richtigeres Resultat, je näher die Klassen bei einander liegen.

§. 12.

Wenn die Aufnahme der Baumstärken nach Durchmessern oder Umfängen stattgefunden und man die Unterschiede der Klassenstärken nicht groß angenommen hat, so ergeben sich (§. 11) mehr Klassen, als dann, wenn die Durchmesser um eine bedeutendere Größe differiren. Sollte nun aus jeder Klasse ein Modellstamm gefällt werden, so würde dies zu Weitläufigkeiten führen, die man durch das Zusammenfassen mehrerer Klassen in eine einzige zu umgehen gesucht hat.

Viele Forstleute schlagen indessen hierbei ein ganz unrichtiges Verfahren ein. Wenn r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6 die Halbmesser von sechs Stärkeklassen, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 die ihnen zugehörenden Stammzahlen bedeuten, so vereinigen sie z. B. die drei ersten Klassen in der Weise, daß sie die Summe $a_1 + a_2 + a_3$ der Stammzahlen dieser Klassen auf die Klasse r_2 werfen und damit festsetzen, sämmtlichen Stämmen komme die Stärke r_2 zu. Ebenso theilen sie die Anzahl der Stämme der letzten drei Klassen der fünften Stärkeklasse mit dem Halbmesser r_5 zu. Hier ist also der Halbmesser der neugebildeten Klasse gleich dem arithmetischen Mittel aus den Halbmessern der zu vereinigenden Klassen.

Das richtige Verfahren dagegen ergibt sich durch die Erwägung, daß die Kreisflächensumme der Stämme der drei Klassen gleich sein muß der Kreisflächensumme der nämlichen Stammzahl, berechnet für den Halbmesser r einer einzigen mittlern Klasse. Es ist also

$\pi r^2 (a_1 + a_2 + a_3) = \pi r_1^2 a + \pi r_2^2 a_2 + \pi r_3^2 a_3$, oder allgemein
$\pi r^2 (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots) = \pi r_1^2 a + \pi r_2^2 a_2 + \pi r_3^2 a_3 + \ldots$,
woraus

$$r^2 = \frac{r_1^2 a_1 + r_2^2 a_2 + r_3^2 a_3 + \ldots}{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots} \text{ und}$$

$$r = \sqrt{\frac{r_1^2 a_1 + r_2^2 a_2 + r_3^2 a_3 + \ldots}{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots}}$$

folgt.

Wenn also mehrere Stärkeklassen in eine einzige zusammengefaßt werden sollen, so berechnet sich für letztere ein neuer Halbmesser, indem man die Quadratwurzel aus dem Quotienten zieht, welcher sich durch Division der Summe der Stammzahlen der ursprünglichen Klassen in die Summe der Producte der Quadrate der Klassenhalbmesser und der zugehörigen Stammzahlen bildet.

Wird die vorletzte Gleichung mit π multiplicirt, so ist

$$\pi r^2 = \frac{\pi r_1^2 a_1 + \pi r_2^2 a_2 + \pi r_3^2 a_3 + \ldots}{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots}$$

d. h. die Kreisfläche der neuen Klasse wird gefunden, indem man die Stammzahlen aller zu vereinigenden Klassen addirt und mit dieser Summe in die Summe der Kreisflächen aller Stämme, berechnet für die durch die unmittelbare Messung gefundenen Diameter, dividirt.

§. 13.

Gesetzt, die Baumquerschnitte seien Ellipsen, so erhält man deren Flächeninhalt zu groß, wenn man den Umfang mißt und dazu die Fläche als Kreisfläche berechnet, denn die Ellipse hat bei gleichem Flächeninhalt mehr Umfang, als der Kreis.

Wenn ein Mal die kleine Axe b, das andere Mal die große Axe a der Ellipse gemessen, für beide Axen die Kreisfläche berechnet und aus diesen das Mittel genommen wird, so ist dieses immer noch größer, als der Flächeninhalt der Ellipse.

Inhalt beider Kreise $= \pi a^2 + \pi b^2 = \pi (a^2 + b^2)$;

Inhalt der Ellipse $= \pi ab$;

Mittel aus beiden Kreisen $= \frac{\pi (a^2 + b^2)}{2}$;

Differenz $x = \frac{\pi (a^2 + b^2)}{2} - \pi ab = \pi \left(\frac{a^2 + b^2}{2} - ab\right) = \frac{\pi (a^2 - 2ab + b^2)}{2} = \frac{\pi (a - b)^2}{2}$, also x wesentlich positiv, denn $(a - b)^2$ ist als Quadrat immer positiv; demnach halbe Summe des Flächeninhaltes beider Kreise größer, als Flächeninhalt der Ellipse.

1) Für $a = b$ ist $x = 0$; d. h., wenn der Querschnitt ein Kreis ist, so gibt die doppelte Messung ein ganz richtiges Resultat, wie natürlich.

2) Je größer a gegen b ist, um so größer die Differenz x.

3) Das Verhältniß des Fehlers zu dem richtigen Resultat drückt sich aus durch $\frac{(a - b)^2}{2ab}$; d. h., der Fehler macht einen um so kleinern Theil der zu berechnenden Fläche der Ellipse aus, je größer der Inhalt dieser ist.

Es sei z. B. $a = 11$, $b = 10$, so ist $a - b = 1$, $2ab = 220$, und der Fehler beträgt 0,4545 %.

Ist $a = 21$, $b = 20$, so ist $a - b = 1$, $2ab = 840$, der Fehler beträgt 0.119 %.

Ist $a = 2$, $b = 1$, so ist $a - b = 1$, $2ab = 4$, der Fehler beträgt 25 %.

Bei dünnen Stämmen ist die Differenz der beiden Axen niemals so groß, als bei dicken Stämmen; es wird demnach auch der Fehler bei jenen nicht so bedeutend werden können, als wir ihn in dem letzten Beispiel gefunden haben.

Man müßte eigentlich, um den Unterschied in der Berechnung der Stammquerfläche aus den beiden Axen und aus dem Umfang ermessen zu können, den Inhalt ermitteln, der sich aus dem Umfang einer Ellipse ergibt, wenn man diesen Umfang einem Kreise zuschreibt. Diese Aufgabe führt auf elliptische Functionen; ihre Lösung ist etwas umständlich; wir können sie deßhalb hier um so mehr übergehen, als die Anwendung des Meßbandes schon aus andern Gründen zu verwerfen ist. Das beste Meßband längt sich nämlich oder verkürzt sich, je nach dem Feuchtigkeitszustand der Luft und dem Material, aus welchem es gefertigt ist; dann erfordert aber auch der Gebrauch dieses Instrumentes sehr viel Zeit, sobald man es mit einer größern Anzahl von Stämmen zu thun hat.

Die Umfangsmessung liefert immer ein zu großes Resultat; das Mittel aus den für beide Axen berechneten Kreisflächen ist gleichfalls etwas größer, als der wahre Flächeninhalt der Ellipse. Da man übrigens in Praxi nicht gewohnt ist, immer den größten oder kleinsten Durchmesser eines Baumes abzugreifen, sondern einen mittlern, so wird der Fehler, der sich durch Anwendung der Kluppe ergibt, nicht das Maximum des möglichen Betrags erreichen.

Der mittlere Durchmesser einer Ellipse liegt offenbar zwischen a und b; gesetzt, es sei ein Halbmesser $\frac{a+b}{2}$ gemessen worden, so ist der dazu gehörige Kreisflächeninhalt $= \frac{\pi (a+b)^2}{2}$; der Flächeninhalt der Ellipse ist $= \pi ab$, der Fehler demnach

$$=\pi\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\pi ab=\frac{\pi(a^2+2ab+b^2-4ab)}{4}=\frac{\pi(a-b)^2}{4};$$

dieser Fehler ist demnach nur halb so groß, als der vorhin gefundene. Es geht hieraus hervor, daß man die Querfläche eines Stamms richtiger erhält, wenn man aus beiden Durchmessern das Mittel nimmt und zu letzterm die Kreisfläche berechnet, als wenn man für jeden Durchmesser die Kreisfläche besonders aufsucht und die Summe dieser beiden halbirt.

§. 14.

Die Resultate, zu welchen wir durch die Entwicklungen in den vorstehenden Paragraphen gelangten, sind im Wesentlichen folgende:

1) Diejenige Methode der Holzmassenaufnahme, welche das genaueste Resultat liefert, ist nicht immer zugleich die für die Praxis brauchbarste. Die Arbeit, welche auf irgend eine Untersuchung verwandt wird, muß im Verhältniß stehen zu dem Effect, welcher erzielt werden soll. Sehr häufig ist man genöthigt, ein Verfahren, welches sehr richtige Resultate liefert, zu verlassen, weil der durch dasselbe gebotene Grad der Genauigkeit nicht verlangt wird, oder sich nicht als Aequivalent für die Arbeit darstellt, welcher man sich, um ihn zu erreichen, unterziehen mußte.

2) Die Berechnungen der Holzmasse eines Bestandes
   a) aus einem oder mehreren mit der arithmetisch mittlern Kreisfläche versehenen Modellstämmen, und
   b) aus Stärkeklassenmodellstämmen,

   stimmen nur dann mit einander überein, wenn die Producte aus Höhe und Vollholzigkeit (König's Richthöhen)

in der Weise von der Stammstärke abhängig sind, daß die Gleichung

$$p = P - c + \frac{G}{g} c$$

besteht, in welcher p, P zwei solche Producte, g, G die zugehörigen Querkreisflächen der Stämme und c eine durch die Beobachtung zu bestimmende Constante bedeuten.

3) Die Erfahrung weist nach, daß diese Function mit vollkommen mathematischer Stetigkeit in keinem Walde sich findet. Es wird deßhalb das unter 2, a) angegebene Verfahren stets ein richtigeres Resultat zur Folge haben, als das unter 2, b) genannte.

4) Die durch die Gleichung $p = P - c + \frac{G}{g} c$ ausgedrückte Function findet noch am ersten in vollkommen geschlossenen, regelmäßig erzogenen Waldungen statt. In solchen kann daher das Verfahren 2, a), wenn nicht ein besonderer Grad von Genauigkeit verlangt wird, angewandt werden. Für forststatische Untersuchungen oder überhaupt in dem Falle, daß man auf eine genaue Kenntniß der Holzmasse eines Bestandes reflectirt, muß dagegen auch in Waldungen dieser Art die Methode 2, b) eingeschlagen werden.

5) Die Holzmasse lückiger, oder wegen vorgerückten Alters abständiger Bestände, sowie diejenige von Abtriebsschlägen, in welchen die Mutterbäume ungleichförmig über die Fläche vertheilt sind und schon lange in freiem Stand sich befinden, kann, wenn es sich um nur einigermaßen genaue Resultate handelt, nur durch Errichtung von Stärke-Höhenklassen erforscht werden. Der Holzgehalt des ganzen Bestandes wird abgeleitet aus Klassenmodellstämmen. Höhen und Diameter müssen gemessen, nicht taxirt werden.

6) Die Massenschätzung liefert das ungenaueste Resultat. Die stammweise Taxation der Holzmassen erfordert mehr Arbeit, als das in 5. angegebene Verfahren. Sie ist deßhalb total zu verwerfen.

7) In geschlossenen, regelrecht erzogenen Beständen ist die Unterscheidung von Höheklassen überflüssig, weil diese schon durch die Stärkeklassen gebildet werden. Dabei ist aber vorausgesetzt, daß jeder Theil des Bestandes, in welchem eine andere Function der Höhe herrscht, getrennt behandelt werde. Es hängt von dem gewünschten Grad der Genauigkeit ab, wie weit die durch Aenderung der Höhenfunction gebotene Aussonderung der Bestände gehen soll.

8) Eine sogenannte Probefläche muß wenigstens eine solche Größe haben, daß auf ihr alle Stammklassen in dem Verhältniß, wie im ganzen Bestande, vertreten sind. Sie kann deßhalb, unter sonst gleichen Umständen kleiner in jüngern, sie muß größer in ältern Beständen genommen werden. Sehr kleine Probeflächen liefern ein fehlerhaftes Resultat.

9) Das Legen von Probestreifen durch unter sich verschiedene Bonitäten eines Bestandes ist als unnütz zu verwerfen.

10) Nur dann, wenn die Holzmasse eines Bestandes aus dem mit der arithmetisch mittlern Kreisfläche versehenen Modellstamme bestimmt werden soll, ist es nöthig, die Stärken der Bäume aller Klassen in einem der jedesmaligen Stammlänge H proportionalen Abstand $\frac{H}{k}$ vom Boden zu messen. Die Befolgung der Vorschrift Smalian's, diesen Abstand immer zu $\frac{1}{20}$ der Baumlänge anzunehmen, führt bei der Messung sehr hoher oder sehr niedriger Stämme zu großen Mißständen.

11) Die Herleitung der Stärke des mittlern Modellstamms mehrerer Stärkeklassen aus der durch die Stammzahl dividirten Durchmessersumme aller Stämme dieser Klassen, ist fehlerhaft. Die Stärke eines solchen Baumes ergibt sich richtig durch Division der Stammzahl in die Kreisflächensumme aller Stämme.

12) Sollen mehrere Stärkeklassen in eine einzige zusammengefaßt werden, so berechnet sich für letztere ein neuer Halbmesser, indem die Summe der Producte aus den Quadraten der Halbmesser der ursprünglichen Klassen in die zugehörigen Stammzahlen durch die Gesammtstammzahl aller Klassen dividirt und aus dem Quotienten die Quadratwurzel gezogen wird. Es ist insbesondere fehlerhaft, sämmtliche Stämme derjenigen Klasse zuzutheilen, deren Durchmesser das Mittel aus den Durchmessern der zu vereinigenden Klassen ist.

13) Der Flächeninhalt einer elliptischen Stammquerfläche berechnet sich richtiger aus dem arithmetischen Mittel zwischen dem größten und kleinsten Halbmesser, als aus dem Mittel zwischen den zu diesen Halbmessern gehörenden Kreisflächen.

Die Bestimmung des mittlern Holzalters.

II.

Die Bestimmung des mittlern Alters ungleichaltriger Holzbestände.

§. 15.

Es ereignet sich bei fast jeder Waldertragsregelung, daß mehrere ungleichaltrige Bestände zusammen abgetrieben werden müssen. Sind die Flächen verhältnißmäßig bedeutend, so lohnt es sich, die Holzmassen, welche sie zur Zeit der Haubarkeit liefern werden, getrennt zu berechnen. Besitzen dagegen die Flächen geringere Ausdehnung, soll z. B. zu einer verhältnißmäßig großen Parzelle eine verhältnißmäßig kleinere geschlagen werden, so ist es oft wünschenswerth, um in dem Hauptwirthschaftsplan Uebersichtlichkeit zu erhalten, wenn mehrere Bestände als ein Ganzes betrachtet und ihre Massen in einem einzigen Ansatz ausgeworfen werden. Hier bedarf man nun der Kenntniß eines gemeinschaftlichen (mittlern) Alters für die verschiedenaltrigen, aber zu vereinigenden Abtheilungen.

Wir wollen uns beispielsweise an das Massenfachwerk halten. Dieses theilt, wie bekannt, den Einrichtungszeitraum in Perioden und setzt die Masse eines jeden Bestandes in dasjenige Fach, in welchem dieser, mit Rücksicht auf sein gegenwärtiges und das angenommene Haubarkeitsalter, zum Abtrieb kommt. Man habe eine Umtriebszeit von 100 Jahren und fünf Perioden von 20

Jahren Länge. Ein 30jähriger Bestand kommt alsdann in der IV. Periode zum Hieb und wird deßhalb im IV. Fach in Ansatz gebracht. Hängt aber nun an der 30jährigen Abtheilung eine 18- und eine 49jährige Fläche, welche zugleich mit derselben abgetrieben werden sollen, so fragt es sich, ob nun auch noch die drei vereinigten Bestände in die IV. Periode fallen.

Ist in einem Distrikte das ungleichaltrige Holz nicht flächenweise getrennt, sondern unter einander vermengt, so kann man die Bestimmung eines mittlern Alters kaum umgehen. Zwar ließe sich für jede Altersklasse die Masse besonders berechnen; allein die Unzulänglichkeit unserer Ertragstafeln setzt einem solchen Verfahren viele Schwierigkeiten entgegen. Ueberdies bliebe hier immer noch das Haubarkeitsalter zu bestimmen. Es ist begreiflich, daß man in einem ungleichaltrigen Bestande nicht für jede Altersklasse die normale Umtriebszeit einhalten kann, wenn der Bestand auf einmal abgetrieben werden soll. Welche ist nun die Zeit, innerhalb deren ein solcher Bestand mit dem Hiebe verschont bleiben muß, im Verhältniß zum normalen Abtriebsalter?

Bei der Wahl der letztern wurde man besonders durch die Rücksicht geleitet, daß am Ende desselben eine gewisse Holzmasse sich ergebe. Wir wollen nicht sagen — die größte (die dann stattfindet, wenn der jährliche Durchschnittszuwachs seinen Culminationspunkt erreicht hat); noch andere Motive, als das der größten Holzerzeugung, bestimmen die Länge der Umtriebszeit. Es kommen hier die Sortimentsverhältnisse und der Geldwerth des Holzes zur Sprache; man hat Bedacht zu nehmen auf die Instandhaltung der Bodenkraft, auf die erfolgenden Reinerträge u. s. w.

Fassen wir aber alles Dasjenige, was über die Wahl der Umtriebszeit entscheidet, zusammen in's Auge, so können wir immer sagen, daß diese Zeit dann eintritt, wenn eine gewisse

Holzmasse erfolgt. Die Masse ist immer eine Function des Alters, und umgekehrt läßt sich das Alter durch die Masse ausdrücken.

Wenn ein gleichaltriger, gegenwärtig ajähriger Bestand im Alter u abgetrieben werden soll, so kann er offenbar noch u — a Jahre auf dem Stock bleiben, ehe er gefällt wird. Man denkt, er werde in u — a Jahren die voraussichtlich festgesetzte Holzmasse liefern.

Ist der Bestand dagegen ungleichaltrig, so ist es nicht möglich, u — a ohne Weiteres zu bestimmen, weil man wohl u, aber nicht a kennt. Es wirft sich hier die Frage auf, welches das gemeinschaftliche Alter des sämmtlichen ungleichaltrigen Holzes der Fläche sei. Der Begriff des mittlern Alters setzt sich hiernach folgendermaßen fest: es ist diejenige Zeit, welche ein gleichaltriger Bestand gebraucht haben würde, um die nämliche Holzmasse zu erzeugen, welche gegenwärtig der ungleichaltrige Bestand besitzt.

Nur dann, wenn die Bonität bereits bekannt ist, läßt sich u vorausbestimmen. Ist dieses aber nicht der Fall, so muß erst der Durchschnittszuwachs für ein einziges mittleres Alter ausfindig gemacht werden. Nach der Größe dieses richtet sich dann die Länge der Umtriebszeit. Sehr häufig — man kann sagen, immer — dient also die Erforschung des mittlern Alters auch noch dazu, um Kenntniß von der vortheilhaftesten Abtriebszeit zu erlangen.

§. 16.

Denken wir uns neben der von dem ungleichaltrigen Bestand eingenommenen Fläche alle Altersstufen in gleichaltrigen Beständen, welche Boden, Lage, Klima, Holzart, Betriebsart, frühere und jetzige Waldbehandlungsart (insoweit dies möglich ist) mit ersterem gemein haben, so braucht man nur die Masse

des ungleichaltrigen Bestandes zu vergleichen mit der nämlichen Masse, welche einer der daneben liegenden gleichaltrigen Bestände aufzuweisen hat, um nach der vorausgegangenen Definition das mittlere Alter zu erfahren. Dieser Weg ist zuerst von Karl*) verfolgt worden; aber Gümbel**) hat ihn schon im Jahr 1841 in Vorschlag gebracht.

Nach diesem Verfahren lassen sich auch alle übrigen Methoden zur Altersbestimmung auf ihre Richtigkeit prüfen; nur muß man dabei das Prinzip im Auge behalten und auf dieses gestützt die Richtigkeit oder Unrichtigkeit einer Methode nachweisen. Letzteres gelingt aber nicht in der Art, daß man Zahlenbeispiele componirt und das Resultat an den Maßstab der Ertragstafel hält, wie Karl gethan hat, der deßwegen auch, und, wie wir überzeugt sind, mit vollem Recht, scharf getadelt worden ist. Durch Beispiele führt man niemals allgemeine Beweise, wenn nicht klar vorliegt, daß dieselben so combinirt sind, daß sie alle denkbaren Fälle enthalten. Die von Karl gewählten Beispiele beziehen sich übrigens nur auf seine Ertragstafel; viele Resultate, zu denen er gelangt ist, hängen nur von der eigenthümlichen Construction dieser Tafel ab. Wir werden zu einer andern Zeit Gelegenheit nehmen, nachzuweisen, daß der Wachsthumsgang, wie ihn die Karl'sche Tafel für Buchenhochwald enthält, in der Natur gar nicht stattfindet und machen vorerst nur darauf aufmerksam, daß Karl seine Ansichten über das Wachsthum der ungenügsamen Holzarten durch eine Ertragstafel für Weißtannenbestände, welche er in der Forst- und Jagdzeitung 1843, 243 mittheilt, förmlich widerrufen hat. Wollte Karl wissenschaftlich verfahren, so mußte er erst das Prinzip der Ertragstafel hervorheben, welche er seiner Beweisführung zu Grunde

*) Ausführliche Abhandlung über die Ermittlung des richtigen Holzbestandsalters und dessen Einfluß auf die Forstertragsberechnungen. Frankfurt 1847.

**) Forst- und Jagdzeitung. 1841, 85.

gelegt hat. Er hätte ausdrücklich bemerken sollen, daß die von ihm gefundenen Sätze nur für eine nach steigenden Durchschnittszuwachsen componirte Tafel Geltung haben können.

Da mit Sicherheit behauptet werden darf, daß wir gegenwärtig noch nicht für eine einzige Bonität und Holzart eine alle Altersstufen umfassende Ertragstafel besitzen, so folgt daraus, daß das Verfahren der Bestimmung des mittlern Alters ungleichaltriger Holzbestände nach Ertragstafeln in Praxi nicht angewandt werden kann, ganz abgesehen davon, daß es außerordentlich schwer hält, für jede Localität die entsprechende Ertragstafel auszuwählen. Man war daher auf andere Methoden bedacht, um das fragliche Alter zu ermitteln.

§. 17.

Aus der vorhin gegebenen Definition des letztern geht die nachstehende Gleichung I. hervor

$$faz + f'a'z' + f''a''z'' + \ldots = ZA_1 (f + f' + f'' + \ldots) \ldots\ldots I.,$$

in welcher a, a', a''.... die Alter, z, z', z''.... die denselben entsprechenden Durchschnittszuwachse für die Flächeneinheit (also z. B. für den Morgen), f, f', f''.... die Flächen, auf welchen die Holzmassen faz, f'a'z', f''a''z''.... der ungleichaltrigen Bestände sich befinden, bedeuten. Z ist der dem noch unbekannten mittlern Alter entsprechende Durchschnittszuwachs für die Flächeneinheit. Für solche ungleichaltrige Bestände, in denen die Massen nicht flächenweise getrennt, sondern unter einander vermengt vorkommen, sind f, f', f''.... Coefficienten, mit denen man den Ertrag der Flächeneinheit multipliciren muß, um die Massen der einzelnen Klassen zu erhalten.

Das Verfahren, welches eingeschlagen werden muß, um die in obiger Gleichung enthaltenen Werthe aus einem gegebenen Bestand zu erheben, ist folgendes.

In der Voraussetzung, daß das Alter der Bäume sich, wenigstens annäherungsweise in der Stammstärke und in der Höhe ausspricht, bringt man die Stämme in Klassen, entweder nach Stärken allein, oder nach Stärken und Höhen. Es kommt nun zwar fast immer vor, daß einzelne schwächere Stämme älter, als stärkere sind; allein im Durchschnitt kann man doch das eben ausgesprochene Gesetz als richtig anerkennen; für geschlossene Hochwaldungen, die wir hier vorzüglich in Betracht zu nehmen haben, besteht es wenigstens innerhalb gewisser Grenzen. Wollte man dies nicht zugeben, so müßte man aus jedem Stamm eine einzige Klasse bilden, was aber die Untersuchung sehr mühselig und kostspielig machen würde, abgesehen davon, daß der erwartete Erfolg nicht in Einklang stehen würde mit der aufgewendeten Arbeit. Zur größern Verlässigung darüber, daß man wirklich das mittlere Alter jeder Klasse erhält, kann der Durchschnitt aus dem Alter mehrerer Stämme der Klasse genommen werden.

Man läßt jetzt aus jeder Klasse einen, oder, wenn es, wie eben bemerkt, auf größere Genauigkeit ankommt, mehrere Stämme fällen, vermißt diese kubisch und ermittelt ihr Alter durch Zählen der Jahrringe. Um diese sichtbarer zu machen, hat man vorgeschlagen, Farbmaterien auf die Abhiebsfläche einzureiben; nach unsere Erfahrungen leistet ein Aufguß von Ferrocyankalium und hierauf von Eisenchlorid ziemlich gute Dienste. Allein durch alle chemischen Reactionen macht man die Jahrringe nicht deutlicher erkennbar, als wenn man den Stock recht glatt abhauen oder abhobeln läßt.

Sehen wir nun, was unsere obige Gleichung I. bedeutet. Sie sagt uns: die Masse des ganzen ungleichaltrigen Bestandes soll gleich sein dem Durchschnittszuwachs dieses Bestandes, multiplicirt durch ein einziges (mittleres) Alter A_I. Diese Gleichung entspricht also vollkommen dem vorhin aufgestellten Begriff des mittlern Alters. Denn das Product aus dem Durchschnitts-

zuwachs und dem Alter gibt ja die Masse, und es soll die Masse des ungleichaltrigen Bestandes gleich sein der Masse eines gleichaltrigen Bestandes, dessen (noch unbekanntes) Alter durch A_I vorgestellt ist.

Es fragt sich nun, was Z sei. Ist der Durchschnittszuwachs keine Function des Alters, so kann Z nur aus einer Ertragstafel entnommen werden. Sind aber z, z′, z″.... stetige Functionen von a, a′, a″.... so wandelt sich Gleichung I. in folgende um

$$fa\varphi(a)+f'a'\varphi(a')+f''a''\varphi(a'')+\ldots.=A_{I'}\varphi(A_{I'})(f+f'+f''+\ldots.)\ldots I'$$

woraus

$$A_{I'}=\frac{faz+f'a'z'+f''a''z''+\ldots.}{\varphi(A_{I'})\,(f+f'+f''+\ldots.)}$$

folgt.

Es ist durchaus nicht gesagt, daß, wie Karl (Anleitung ꝛc. S. 37) meint, $Z=fz+f'z'+f''z''+\ldots.$ sein müsse; das heißt: der dem mittlern Alter entsprechende Durchschnittszuwachs braucht nicht gleich zu sein der Summe der Durchschnittszuwachse aller ungleichaltrigen Abtheilungen.

§. 18.

Nehmen wir nun einmal an, es sei $ZF=fz+f'z'+f''z''+\ldots.$, so ergibt sich hieraus die Gleichung

$$A_{II}=\frac{faz+f'a'z'+f''a''z''+\ldots.}{fz+f'z'+f''z''+\ldots.}\;\ldots\ldots\; II.$$

Diese Formel stimmt vollständig mit folgender überein, welche von Professor Carl Heyer aufgestellt worden ist*). Nach Carl Heyer ist

*) Die Waldertragsregelung, Gießen 1841, S. 119, und Anleitung zu forststatischen Untersuchungen, Gießen 1846, S. 115.

$$A_{III} = \frac{m + m' + m'' + \ldots}{\frac{m}{a} + \frac{m'}{a'} + \frac{m''}{a''} + \ldots} \ldots\ldots\ldots \text{III.}$$

wobei $m, m', m'' \ldots$ die Massen der mit den Altern $a, a', a'' \ldots$ versehenen Klassen bedeuten. Es ist also $faz = m$, $f'a'z' = m'$, $f''a''z'' = m'' \ldots$ und $fz = \frac{m}{a}$, $f'z' = \frac{m'}{a'}$, $f''z'' = \frac{m''}{a''} \ldots$

Auch die Formel von Smalian*) ist mit unserer Formel gleichbedeutend. (Nur hinsichtlich der Bestimmung der Klassenalter findet sich einiger Unterschied, da Smalian die Klassen nur nach Stammlängen bildet, während wir zugleich Rücksicht auf die Stärke der Bäume nehmen.) Nach Smalian ist

$$\overset{m}{n} = \frac{\overset{n}{H} + \overset{n'}{H} + \overset{n''}{H} + \ldots}{\frac{\overset{n}{H}}{n} + \frac{\overset{n'}{H}}{n'} + \frac{\overset{n''}{H}}{n''} + \ldots} \ldots\ldots\ldots \text{IV.}$$

worin $\overset{m}{n}$ das mittlere Alter, $\overset{n}{H}, \overset{n'}{H}, \overset{n''}{H} \ldots$ die Massen der mit den Altern n, n', n'' behafteten Klassen bedeuten. Es ist also, um diesen Ausdruck in unsern zu übersetzen,

$$\overset{n}{H} = faz = m,\ \overset{n'}{H} = f'a'z' = m',\ \overset{n''}{H} = f''a''z'' = m'' \ldots;$$

$$\frac{\overset{n}{H}}{n} = fz = \frac{m}{a},\ \frac{\overset{n'}{H}}{n'} = f'z' = \frac{m'}{a'},\ \frac{\overset{n''}{H}}{n''} = f''z'' = \frac{m''}{a''} \ldots, \text{ also}$$

$$A_{II} = A_{III} = \overset{m}{n} = \frac{faz + f'a'z' + f''a''z'' + \ldots}{fz + f'z' + f''z'' + \ldots}$$

$$= \frac{m + m' + m'' + \ldots}{\frac{m}{a} + \frac{m'}{a'} + \frac{m''}{a''} + \ldots}$$

*) Anleitung zur Untersuchung des Waldzustandes 2c., Berlin 1840, S. 33, und Beiträge zur Forstwissenschaft, Stralsund 1842, S. 76.

$$= \frac{\overset{n}{H} + \overset{n'}{H} + \overset{n''}{H} + \ldots}{\frac{\overset{n}{H}}{n} + \frac{\overset{n'}{H}}{n'} + \frac{\overset{n''}{H}}{n''} + \ldots}$$

§. 19.

Nimmt man an, die Durchschnittszuwachse der einzelnen Klassen seien pro Morgen einander gleich, also $z = z' = z'' = \ldots$, so verwandelt sich Gleichung II. in folgende:

$faz + f'a'z + f''a''z + \ldots = (fz + f'z + f''z + \ldots) A$ oder

$(fa + f'a' + f''a'' + \ldots) z = z (f + f' + f'' + \ldots) A$;

dividirt man auf beiden Seiten durch $z (f + f' + f'' + \ldots)$, so ist

$$A_V = \frac{fa + f'a' + f''a'' + \ldots}{f + f' + f'' + \ldots} \quad \ldots\ldots\ldots \text{V.},$$

welche die Formel von Gümbel ist*). Diese gilt also nur dann, wenn angenommen wird, der Durchschnittszuwachs aller Klassen sei für die Flächeneinheit derselbe; d. h. der Durchschnittszuwachs bleibe sich durch die Alter a, a', a''.... hin in einem Bestande völlig gleich.

§. 20.

Die Formel Gümbel's stimmt mit derjenigen von Carl Heyer und Smalian vollkommen überein, wenn man in diesen beiden gleichfalls annimmt, der Durchschnittszuwachs sei für die Flächeneinheit durch alle Altersstufen der nämliche.

Denn nennen wir die Erträge, welche die Altersklassen a, a', a''.... pro Morgen geben würden, m, m', m''...., so ist

---

*) Forst- und Jagdzeitung. 1841, 89.

$$m = \mathfrak{m} \cdot \frac{f}{F},\ m' = \mathfrak{m}' \cdot \frac{f'}{F},\ m'' = \mathfrak{m}'' \cdot \frac{f''}{F} \ldots,$$

wobei $f + f' + f'' + \ldots = F$ gesetzt ist. Nun ist auch

$$m = \frac{\mathfrak{m}fa}{aF},\ m' = \frac{\mathfrak{m}'f'a'}{a'F},\ m'' = \frac{\mathfrak{m}''f''a''}{a''F} \ldots;$$

$$\frac{m}{a} = \frac{\mathfrak{m}f}{aF},\ \frac{m'}{a'} = \frac{\mathfrak{m}'f'}{a'F},\ \frac{m''}{a''} = \frac{\mathfrak{m}''f''}{a''F} \ldots$$

und Formel III. verwandelt sich in

$$A_{III} = \frac{\frac{\mathfrak{m}fa}{aF} + \frac{\mathfrak{m}'f'a'}{a'F} + \frac{\mathfrak{m}''f''a''}{a''F} + \ldots}{\frac{\mathfrak{m}f}{aF} + \frac{\mathfrak{m}'f'}{a'F} + \frac{\mathfrak{m}''f''}{a''F} + \ldots};$$

setzt man nun, der vorhinigen Annahme zu Folge,

$$\frac{\mathfrak{m}}{a} = \frac{\mathfrak{m}'}{a'} = \frac{\mathfrak{m}''}{a''} = \ldots,\ \text{so ist}$$

$$A_{III} = \frac{\frac{\mathfrak{m}fa}{aF} + \frac{\mathfrak{m}f'a'}{aF} + \frac{\mathfrak{m}f''a''}{aF} + \ldots}{\frac{\mathfrak{m}f}{aF} + \frac{\mathfrak{m}f'}{aF} + \frac{\mathfrak{m}f''}{aF} + \ldots}$$

Wird der gemeinschaftliche Factor ausgeschieden, und Zähler und Nenner durch F dividirt, so ist

$$A = \frac{\frac{\mathfrak{m}}{a}(af + a'f' + a''f'' + \ldots)}{\frac{\mathfrak{m}}{a}(f + f' + f'' + \ldots)}$$

$$= \frac{af + a'f' + a''f'' + \ldots}{f + f' + f'' + \ldots} = A_V,$$

also $A_{III} = A_V$.

Es ist überflüssig, auch Smalian's Formel auf die Gümbel'sche einzurichten, da die in jener enthaltenen Werthe sich von denen Heyer's nur durch die Wahl anderer Buchstaben unterscheiden.

Wir wissen jetzt:
daß Heyer's und Smalian's Formel nur dann mit derjenigen von Gümbel übereinstimmen, wenn angenommen wird, der Durchschnittszuwachs für die Flächeneinheit bleibe durch alle Altersstufen hin derselbe. Danach ist auch die Behauptung Smalian's*), daß seine Formel sich nicht von Gümbel's Formel unterscheide, zu berichtigen.

§. 21.

Es ist vorhin bemerkt worden, daß man das mittlere Alter eines ungleichaltrigen Bestandes am richtigsten und genauesten erfährt, wenn man in der für einen gleichaltrigen, unter denselben Umständen erwachsenen, Bestand entworfenen Ertragstafel nachsieht, welchem Alter die Masse M des ungleichaltrigen Bestandes entspricht. Dieses Verfahren ist richtig, die Tafel mag nach irgend einem Zuwachsgesetze construirt sein.

Da die Formel Gümbel's voraussetzt, daß der Durchschnittszuwachs durch alle Lebensalter hin sich gleich bleibe, so kann das Resultat dieser Formel auch nur dann mit demjenigen, welches die Ertragstafel liefert, übereinstimmen, wenn in letzterer der Durchschnittszuwachs für jedes Alter der nämliche ist. Hiernach hat man den Werth und die Brauchbarkeit dieser Formel zu beurtheilen.

Die von Heyer und Smalian gegebenen Ausdrücke zur Berechnung des mittlern Alters lassen es dagegen ganz unbestimmt,

*) Beiträge S. 76.

ob der in dieselben eingeführte Durchschnittszuwachs der einzelnen Altersklassen als gleichbleibend, steigend oder fallend angenommen wird. Da wir voraussetzen, daß die Tafel der Erträge des gleichaltrigen Bestandes für die nämliche Localität gilt, auf welcher der ungleichaltrige Bestand sich befindet, so ist klar, daß, wenn die Durchschnittszuwachse in der Tafel steigen oder fallen, auch die in Heyer's und Smalian's Formel eingeführten Durchschnittszuwachse steigend oder fallend (natürlich für die Flächeneinheit) sein werden. Man sollte deßhalb vermuthen, das Resultat, welches man bei der Altersbestimmung nach den beiden genannten Formeln und nach der Ertragstafel erhält, müsse eines und dasselbe sein. Allein diese Vermuthung wird sich nur dann bestätigen, wenn nachgewiesen ist, daß die Summe der Durchschnittszuwachse der einzelnen Klassen gleich dem Durchschnittszuwachs ist, welchen die Ertragstafel für die Masse M und das Alter A aufweist. Wir wollen nun nachsehen, wie dieser Umstand sich verhält.

Wenn M die Masse eines ungleichaltrigen Bestandes und A_{VI} das dieser Masse in der Ertragstafel entsprechende Alter bedeutet, so ist offenbar $A_{VI} = \frac{M}{D}$, wobei $M = m + m' + m'' + \ldots$ und D der Durchschnittszuwachs der Tafel für das Alter A_{VI} ist.

Jedenfalls wird A_{VI} dann mit A_{III} der Heyer'schen und Smalian'schen Formel übereinstimmen, wenn

$$D = \frac{m}{a} + \frac{m'}{a'} + \frac{m''}{a''} + \ldots \text{ ist.}$$

Denn die Zähler der beiden Brüche

$$A_{VI} = \frac{M}{D} \text{ und}$$

$$A_{III} = \frac{m + m' + m'' + \ldots.}{\frac{m}{a} + \frac{m'}{a'} + \frac{m''}{a''} + \ldots.} = \frac{M}{\frac{m}{a} + \frac{m'}{a'} + \frac{m''}{a''} + \ldots.}$$

wären dann die nämlichen. Sind A_{VI} und A_{III} verschieden, so kann dies nur in einer Differenz zwischen D und $\frac{m}{a} + \frac{m'}{a'} + \frac{m''}{a''} + \ldots.$ beruhen.

Nimmt man an, der Durchschnittszuwachs bleibe durch alle Lebensalter hin sich gleich und sei $= 1$, so drückt die Masse auch unmittelbar das Alter aus, denn es ist z. B. für letzteres $= 20$, die Masse $= 1.20 = 20$, für das Alter 60 ist die Masse $= 1.60 = 60$ und so fort. Die Formel $A_{VI} = \frac{M}{D}$ verwandelt sich für unsere Annahme in $A_{VI} = M$, weil ja $D = 1$ wird.

Es ist weiter

$$\frac{m}{a} + \frac{m'}{a'} + \frac{m''}{a''} + \ldots. = \frac{mf}{aF} + \frac{m'f'}{a'F} + \frac{m''f''}{a''F} + \ldots.$$

und da

$$\frac{m}{a} = 1, \quad \frac{m'}{a'} = 1, \quad \frac{m''}{a''} = 1 \ldots.,$$

also auch

$$\frac{m}{a} = \frac{m'}{a'} = \frac{m''}{a''} = \ldots.,$$

so ist

$$\frac{m}{a} + \frac{m'}{a'} + \frac{m''}{a''} + \ldots. = \frac{mf}{aF} + \frac{mf'}{aF} + \frac{mf''}{aF} + \ldots.$$

$$= \frac{m}{a}\left(\frac{f}{F} + \frac{f'}{F} + \frac{f''}{F} + \ldots.\right)$$

$$= \frac{m}{a}\left(\frac{f + f' + f'' + \ldots.}{F}\right) = 1,$$

weil sowohl $\frac{m}{a} = 1$, als auch $\frac{f + f' + f'' + \ldots}{F} = \frac{F}{F} = 1$ ist.

Die Heyer'sche Formel verwandelt sich dadurch in folgende:

$$A_{III} = m + m' + m'' + \ldots = M.$$

Es wird also auch in ihr das Alter unmittelbar durch die Masse ausgedrückt. Daraus geht hervor:

daß das mittlere Alter, bestimmt durch die Heyer'sche Formel mit dem der Ertragstafel dann übereinstimmt, wenn angenommen wird, der Durchschnittszuwachs bleibe auf der Flächeneinheit derselbe für alle Altersstufen.

§. 22.

Wir wollen jetzt untersuchen, ob das nämliche oder irgend ein anderes Resultat für steigenden oder fallenden Zuwachs sich ergibt.

Um unsere Betrachtung zu vereinfachen, nehmen wir an, der positive oder negative Mehrbetrag, den der Zuwachs in jedem Jahr erhält, sei proportional mit dem Alter. Von Anfang an existire ein Stock p, zu diesem lege sich jährlich das Product aus dem Alter in einen ständigen Coefficienten q an, so daß also

$$m = f(p + qa)\,a, \quad m' = f'(p + qa')\,a', \quad m'' = f''(p + qa'')\,a'' \ldots$$

ist. Setzen wir zuerst q positiv.

Das wahre Alter A_{VI}, welches in der Ertragstafel der Masse $m + m' + m'' + \ldots = M$ entspricht, drückt sich durch die Formel

$$A_{VI} = \frac{f(p + aq)\,a + f'(p + a'q)\,a' + f''(p + a''q)\,a'' + \ldots}{F(p + qA_{VI})}$$

aus.

Setzen wir F = 1 (z. B. = 1 Morgen), so ist

$$A_{VI} = \frac{f(p+aq)a + f'(p+a'q)a' + f''(p+a''q)a'' + \ldots}{p + qA_{VI}} \ldots \text{VI.}$$

Die Formel Heyer's ergibt

$$A_{III} = \frac{f(p+aq)a + f'(p+a'q)a' + f''(p+a''q)a'' + \ldots}{f(p+aq) + f'(p+a'q) + f''(p+a''q) + \ldots}$$

Nennen wir $(p + qA_{VI})F = Z'$, $f(p+aq) + f'(p+a'q) + f''(p+a''q) + \ldots = Z$, so ist

$$A_{VI} = \frac{f(p+aq)a + f'(p+a'q)a' + f''(p+a''q)a'' + \ldots}{Z'};$$

$$A_{III} = \frac{f(p+aq)a + f'(p+a'q)a' + f''(p+a''q)a'' + \ldots}{Z}$$

Da die Zähler dieser beiden Brüche gleich sind, so muß $A_{VI} \gtrless A_{III}$ sein, je nachdem $Z' \lessgtr Z$ ist.

Nun ist

$$\begin{aligned} Z &= f(p+aq) + f'(p+a'q) + f''(p+a''q) + \ldots \\ &= fp + f'p + f''p + \ldots + faq + f'a'q + f''a''q + \ldots \\ &= p(f + f' + f'' + \ldots) + q(fa + f'a' + f''a'' + \ldots) \\ &= pF + qA_V F, \end{aligned}$$

weil ja (siehe Gleichung V) $fa + f'a' + f''a'' + \ldots = A_V F$ ist. F nahmen wir vorhin = 1 an, also hat man

$$Z = p + pA_V;$$

$$Z' - Z = p + qA_{VI} - (p + qA_V) = q(A_{VI} - A_V);$$

die Differenz $Z' - Z$ wird positiv, also $Z' > Z$ sein, wenn $A_{VI} - A_V$ positiv, also $A_{VI} > A_V$ ist; sie ist negativ, also $Z > Z'$, wenn $A_V > A_{VI}$ ist.

Wir werden beweisen, daß für q positiv, $Z' > Z$ ist. Dazu entwickeln wir A_{VI} aus seiner Gleichung.

$$A_{VI} = \frac{fa(p+qa) + f'a'(p+qa') + f''a''(p+qa'') + \ldots}{F(p+qA_{VI})}$$

$$= \frac{p(fa + f'a' + f''a'' + \ldots) + q(fa^2 + f'a'^2 + f''a''^2 + \ldots)}{F(p+qA_{VI})}$$

$$= \frac{\frac{p(fa + f'a' + f''a'' + \ldots)}{F} + \frac{q(fa^2 + f'a'^2 + f''a''^2 + \ldots)}{F}}{p+qA_{VI}}$$

Es ist $\frac{fa + f'a' + f''a'' + \ldots}{F} = A_V$; nennen wir

$\frac{fa^2 + f'a'^2 + f''a''^2 + \ldots}{F} = k^2$, so ist

$$A_{VI} = \frac{1}{p+qA_{VI}}(pA_V + qk^2) = \frac{1}{1 + \frac{p}{q}A_{VI}}\left(A_V + \frac{p}{q}k^2\right);$$

$$A_{VI} + \frac{q}{p}A^2_{VI} = A_V + \frac{q}{p}k^2;$$

$$A^2_{VI} + \frac{p}{q}A_{VI} = A_V\frac{p}{q} + k^2;$$

$$A^2_{VI} + \frac{p}{q}A_{VI} + \frac{p^2}{4q^2} = A_V\frac{p}{q} + k^2 + \frac{p^2}{4q^2};$$

$$\left(A_{VI} + \frac{p}{2q}\right)^2 = A_V\frac{p}{q} + k^2 + \frac{p^2}{4q^2};$$

$$A_{VI} + \frac{p}{2q} = \pm\sqrt{A_V\frac{p}{q} + k^2 + \frac{p^2}{4q^2}};$$

$$A_{VI} = \pm\sqrt{A_V\frac{p}{q} + k^2 + \frac{p^2}{4q^2}} - \frac{p}{2q}$$

Es fragt sich nun, ob man den Wurzelausdruck positiv oder negativ nehmen soll.

Da für $q > 0$ alle Werthe unter dem Wurzelzeichen positiv sind, so würde, wenn man sich für $-\sqrt{A_V \frac{p}{q} + k^2 + \frac{p^2}{4q^2}}$ entscheiden sollte, A_{VI} ausgedrückt sein durch eine negative Summe, also selbst negativ ausfallen. Da wir nun keine negativen Alter kennen und den positiven Massen m, m', m''.... nur positive Alter zukommen, so muß auch das Alter A_{VI} positiv sein. Es ist deßhalb

$$A_{VI} = \sqrt{A_V \frac{p}{q} + k^2 + \frac{p^2}{4q^2}} - \frac{p}{2q}$$

Bilden wir jetzt die Differenz

$$A_{VI} - A_V = \sqrt{A_V \frac{p}{q} + k^2 + \frac{p^2}{4q^2}} - \left(A_V + \frac{p}{2q}\right)$$

Um den Satz unter dem Wurzelzeichen seinem Werth nach mit $A_V + \frac{p}{2q}$ vergleichen zu können, erheben wir $A_V + \frac{p}{2q}$ zur zweiten Potenz und ziehen sodann die Quadratwurzel aus. So erhält man

$$A_{VI} - A_V = \sqrt{A_V \frac{p}{q} + k^2 + \frac{p^2}{4q^2}} - \sqrt{A^2_V + A_V \frac{p}{q} + \frac{p^2}{4q^2}}$$

Es sei $A_V \frac{p}{q} + \frac{p^2}{4q^2} = B^2$, so ist

$$A_{VI} - A_V = \sqrt{k^2 + B^2} - \sqrt{A^2_V + B^2}$$

Diese Differenz wird also dann positiv sein, wenn $k^2 > A^2_V$ ist. Um zu erfahren, ob dem so sei, gehen wir auf den Werth von

$$k^2 = \frac{fa^2 + f'a'^2 + f''a''^2 + \ldots}{F}$$

zurück. Multiplizirt man Zähler und Nenner des zweiten Gliedes dieser Gleichung mit $f + f' + f'' + \ldots = F$, so ist

$$k^2 = \frac{(f + f' + f'' + \dots)(fa^2 + f'a'^2 + f''a''^2 + \dots)}{F^2}$$

$$= \frac{1}{F^2} \begin{cases} f^2a^2 + ff'a'^2 + ff''a''^2 + \dots \\ + f'fa' + + f'^2a'^2 + f'f''a''^2 + \dots \\ + f''fa^2 + f''f'a'^2 + f''^2a''^2 + \dots \end{cases}$$

$$= \frac{1}{F^2} \begin{cases} f^2a^2 + f'^2a'^2 + f''^2a''^2 + \dots \\ + ff'(a^2 + a'^2) + ff''(a^2 + a''^2) + \dots \\ + f'f''(a'^2 + a''^2) + \dots \end{cases}$$

Es ist

$$A^2_V = \frac{(fa + f'a' + f''a'' + \dots)^2}{F^2}$$

$$= \frac{1}{F^2} \begin{cases} f^2a^2 + f'^2a'^2 + f''^2a''^2 + \dots \\ + 2ff'aa' + 2ff''aa'' + \dots \\ + 2f'f''a'a'' + 2f'f'''a'a''' + \dots \end{cases}$$

$$k^2 - A^2_V = \frac{1}{F^2} \Big[ff'(a^2 + a'^2 - 2aa') + ff''(a^2 + a''^2 - 2aa'')$$

$$+ f'f''(a'^2 + a''^2 - 2a'a'') + \dots \Big]$$

$$= \frac{1}{F^2} \Big[ff'(a-a')^2 + ff''(a-a'')^2 + f'f''(a'-a'')^2 + \dots \Big]$$

Es werden nun, ganz einerlei, ob $a \lessgtr a'$, $a \lessgtr a'' \dots$ ist, $(a - a')^2$, $(a - a'')^2$, $(a' - a'')^2 \dots$ immer positiv sein, weil sowohl etwas Positives, als etwas Negatives, zum Quadrat erhoben, etwas Positives gibt.

Die Differenz $k^2 - A^2_V$ ist also auch positiv, demnach $k^2 > A^2_V$ und $A_{VI} > A_V$, also auch $Z' > Z$, folglich

$$A_{III} > A_{VI}$$

Für steigenden Zuwachs liefert also die Heyer'sche Formel ein höheres Alter, als die Ertragstafel.

Wir wollen hierüber ein Zahlenbeispiel berechnen und entwerfen dazu eine Ertragstafel, in welcher $p = 1$, $q = 0.01$ ist.

Alter	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Durchschnittszuwachs	1.01	1.02	1.03	1.04	1.05	1.06	1.07	1.08	1.09	1.10	1.11
Masse	1.01	2.04	3.09	4.16	5.25	6.36	7.49	8.64	9.81	11.0	12.21

Zum Ueberfluß bemerken wir nur noch, daß diese Tafel nicht der Wirklichkeit entnommen, sondern künstlich construirt ist. Sie soll nur zur Veranschaulichung der mathematischen Regel dienen.

Es sei $f = 0,7$; $f' = 0,3$; $a = 1$; $a' = 10$, so ist

$m = 0,7 . 1,01$; $m' = 0,3 . 1,1$; $M = m + m' = 0,707 + 3,3 = 4,007$;

$\frac{m}{a} = 0,7 . 1,01$; $\frac{m'}{a'} = 0,3 . 1,1$; $\frac{m}{a} + \frac{m'}{a'} = 0,707 + 0,33 = 1,037$;

$$A_{III} = \frac{m + m'}{\frac{m}{a} + \frac{m'}{a'}} = \frac{4,007}{1 . 037} = 3,86403;$$

$M = (p + qA_{VI})\, A_{VI} = pA_{VI} + qA^2_{VI} = A_{VI} + qA^2_{VI}$;

$A^2_{VI} + \frac{A_{VI}}{q} = \frac{M}{q}$; $A^2_{VI} + \frac{A_{VI}}{q} + \frac{1}{4q^2} = \frac{M}{q} + \frac{1}{4q^2}$;

$$A_{VI} = \sqrt{\frac{M}{q} + \frac{1}{4q^2}} - \frac{1}{2q} = \sqrt{2900,7} - 50 = 53,858 - 50 =$$
$$= 3 . 8581.$$

Es ist also A_{III} um $3,86403 - 3,8581 = 0 . 00593$ größer, als A_{VI}.

Aber auch dann, wenn die Ertragstafel componirt ist nach dem Gesetz des fallenden Zuwachses, ist das Alter, bestimmt nach Heyer's Formel, größer, als dasjenige, welches in der Tafel der Masse M entspricht.

Für $q < 0$ ist nämlich

$$Z = f(p - aq) + f'(p - a'q) + f''(p - a''q) + \dots$$
$$= fp + f'p + f''p + \dots - q(af + a'f' + a''f'' + \dots)$$
$$= p(f + f' + f'' + \dots) - q(af + a'f' + a''f'' + \dots)$$
$$= p - A_{V}q;$$
$$Z' - Z = p - A_{VI}q - (p - A_{V}q)$$
$$= q(A_{V} - A_{VI});$$
$$A_{VI} = \frac{fa(p - qa) + f'a'(p - qa') + f''a''(p - qa'') + \dots}{F(p - qA_{VI})}$$
$$= \frac{\frac{p(fa + f'a' + f''a'' + \dots)}{F} - \frac{q(fa^2 + f'a'^2 + f''a''^2 + \dots)}{F}}{p - qA_{VI}}$$
$$= \frac{1}{p - qA_{VI}}(pA_{V} - qk^2) = \frac{1}{1 - \frac{q}{p}A_{VI}}\left(A_{V} - \frac{q}{p}k^2\right);$$
$$A_{VI} - \frac{q}{p}A^2_{VI} = A_{V} - \frac{q}{p}k^2;$$
$$A_{VI} = \pm\sqrt{k^2 - \frac{p}{q}A_{V} + \frac{p^2}{4q^2}} + \frac{p}{2q}$$

Hier fragt es sich nun abermals, mit welchem Zeichen der Wurzelausdruck genommen werden soll.

In einer nach fallenden Durchschnittszuwachsen componirten Ertragstafel kommt einmal ein Alter A, in welchem die Masse M kleiner ist, als die Masse M' des vorhergehenden Jahres A — 1. Von hier an nehmen die Massen mit dem Durchschnittszuwachsen beständig ab und man gelangt endlich zu einem Alter, in welchem Zuwachs und Masse = 0, ja selbst negativ werden. Es ist klar, daß eine und die nämliche Masse M'' zwei Altern entsprechen kann; das eine derselben liegt vor A, das andere hinter A, denn das Product aus einem kleinern Alter in einen größern Durchschnittszuwachs kann gleich sein dem Product aus

einem größern Alter in einen kleinern Durchschnittszuwachs. Der größere Werth, den die obige Formel für A_{VI} liefert, setzt also nothwendig eine Abnahme der Masse voraus. Unsere Ertragstafeln gehen nun zwar wohl bis zu den Altern, in welchen der Durchschnittszuwachs schon gesunken ist, aber nie soweit, bis die Masse anfängt abzunehmen, was nicht allein ein völliges Aufhören des laufendjährlichen Zuwachses, sondern selbst Einfaulen der Stämme, oder Abfallen von Baumtheilen, oder zum mindesten ein Aushauen prädominirender Stämme voraussetzt. Für die Praxis muß daher stets der kleinere Werth von A_{VI}, d. h. $\sqrt{k^2 - \frac{p}{q} A_V + \frac{p^2}{4q^2}}$ mit dem negativen Zeichen genommen werden. Wir haben uns nur zu erinnern, daß die Bestimmung des mittlern Alters hauptsächlich zu dem Zweck stattfindet, um den Abstand des gegenwärtigen Alters eines Bestandes von der Nutzungszeit festzusetzen, in welcher eine erwartete Masse erfolgt. Diese Zeit wird niemals in diejenige Periode verlegt werden, in welcher die Masse sich zu vermindern beginnt.

Wir sagen also:

$$A_{VI} = -\sqrt{k^2 - \frac{p}{q} A_V + \frac{p^2}{4q^2}} + \frac{p}{2q};$$

$$A_{VI} - A_V = -\sqrt{k^2 - \frac{p}{q} A_V + \frac{p^2}{4q^2}} + \sqrt{\frac{p^2}{4q^2} - \frac{p}{q} A_V + A^2_V};$$

es sei wieder $\frac{p^2}{4q^2} - \frac{p}{q} A_V = B^2$, so ist

$$A_{VI} - A_V = -\sqrt{k^2 + B^2} + \sqrt{A^2_V + B^2}.$$

Da wir nun bereits nachgewiesen haben, daß $k^2 > A^2_V$, einerlei, ob q positiv oder negativ ist, so ist auch $A_{VI} - A_V$ negativ, also $A_{VI} < A_V$. Es ist also auch $Z' - Z$ positiv, also $Z < Z'$ und

$$A_{III} > A_{VI}.$$

Die Formel Heyer's gibt demnach auch für abnehmenden Zuwachs ein größeres Resultat, als die Ertragstafel.

Auch für diesen Fall wollen wir ein Beispiel berechnen. Wir setzen $p = 1$, $q = -0{,}01$. Es ergibt sich dann folgende Ertragstafel.

Alter	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Durchschnittszuwachs	0.99	0.98	0.97	0.96	0.95	0.94	0.93	0.92	0.91	0.90
Masse	0.99	1.96	2.91	3.84	4.75	5.64	6.51	7.36	8.19	9.00

Es sei $f = 0{,}7$; $f' = 0{,}3$; $a = 1$, $a' = 10$, so ist

$$m = 0{,}99 . 0{,}7;\ m' = 9{,}0 . 0{,}3;\ M = m + m' = 0{,}693 + 2{,}7 = 3{,}393;$$

$$\frac{m}{a} = 0{,}99 . 0{,}7;\ \frac{m'}{a'} = 0{,}9 . 0{,}3;\ \frac{m}{a} + \frac{m'}{a'} = 0.693 + 0{,}27 = 0.963;$$

$$\frac{m + m'}{\frac{m}{a} + \frac{m'}{a'}} = \frac{3{,}393}{0{,}963} = 3{,}52339 = A_{III}$$

$$M = (p - qA_{VI})\, A_{VI} = A_{VI} - qA^2_{VI};$$

$$A^2_{VI} - \frac{A_{VI}}{q} = -\frac{M}{q};\ A^2_{VI} - \frac{A_{VI}}{q} + \frac{1}{4q^2} = -\frac{M}{q} + \frac{1}{4q^2};$$

$$A_{VI} - \frac{1}{2q} = \pm\sqrt{-\frac{M}{q} + \frac{1}{4q^2}};\ A_{VI} = \pm\sqrt{-\frac{M}{q} + \frac{1}{4q^2}} + \frac{1}{2q};$$

$$A_{VI} = \pm\sqrt{-339.3 + 2500} + 50 = \pm 46.4833 + 50.$$

Nimmt man nun das negative Zeichen, so erhält man $A_{VI} = 3{,}5167$; dieses Alter ist demnach um $3.52339 - 3.5167 = 0.00669$ kleiner, als das mittelst der Heyer'schen Formel berechnete A_{III}. Für 46.4833 positiv, ergibt sich $A_{VI} = 96.4833$. Man bemerkt sogleich, daß dieses Alter zu hoch ist, denn es liegt weit über den beiden Altern 1 und 10, welche überhaupt auf unsern beiden Flächen vorkommen. Es ist früher auseinandergesetzt worden, daß dieses größere Alter über den Zeitpunkt hinausfällt, in

welchem die Masse des Bestandes abzunehmen beginnt. Um die Zeit zu finden, in welcher die Masse M ihr Maximum erreicht, differenziiren wir die obige Gleichung für M. Es ist:

$$M = (1 - qA_{VI})\,A_{VI} = A_{VI} - qA^2_{VI};$$

$$\frac{dM}{dA_{VI}} = 1 - 2qA_{VI};\ \text{setze}\ \frac{dM}{dA_{VI}} = 0,\ \text{so ist}$$

$$1 - 2qA_{VI} = 0,\ 1 = 2qA_{VI},\ A_{VI} = \frac{1}{2q} = 50.$$

Um zu sehen, ob wirklich ein Maximum stattfinde, bilden wir den zweiten Differenzialcoefficienten. Es ist

$\frac{d^2M}{dA_{VI}{}^2} = -2q$, also negativ. Die Masse hat daher im 50ten Jahr ihren Culminationspunkt erreicht. Für $A_{VI} = 49$ ist $M = 24{,}99$; für $A_{VI} = 50$ ist $M = 25{,}00$; für $A_{VI} = 51$ ist $M = 24{,}99$.

§. 23.

Gesetzt, die Formel

$$A_{III} = \frac{m + m' + m'' + \ldots.}{\frac{m}{a} + \frac{m'}{a'} + \frac{m''}{a''} + \ldots.}$$

liefere das Alter gerade so, wie die Ertragstafel, so ist dieses doch nur das Alter der gegenwärtigen Holzmasse. Die Ermittlung dieses hat aber für die meisten Methoden der Waldertragsregelung wenig oder keinen Werth; wir wollen blos das Alter derjenigen Holzmasse wissen, welche zur Haubarkeit gelangt, weil ja die Altersbestimmung hauptsächlich zu dem Zweck stattfindet, um zu erfahren, welche Zeit noch verfließen muß, bis ein Holzbestand eine gewisse Haubarkeitmasse liefert.

Es ist deßhalb, wenn man mittelst der Formel III. ein

dieser Absicht entsprechendes Resultat erlangen will, durchaus nöthig, daß bei der Aufnahme der Massen m, m′, m″.... diejenigen Stämme ausgeschieden werden, welche nicht zur Haubarkeit gelangen, also den Durchforstungen anheimfallen.

Allein auch bei diesem Verfahren wird die Anwendung der Formel zu großen Mißständen führen, weil sie dann immer noch von der stets wechselnden Größe des Durchschnittszuwachses abhängig ist. So kann es sich ereignen, daß bei der Revision einer Waldertragsregelung und erneuter Bestimmung der Bestandsalter mittelst der obigen Formel andere Alter sich ergeben, als diejenigen sind, welche man erhält, wenn zu dem früher berechneten Alter die Zahl der Jahre hinzugefügt wird, welche seit der ersten Altersbestimmung verflossen sind. Es können dadurch Störungen herbeigeführt werden, welche eine gänzliche Erneuerung der Waldertragsregelung nothwendig machen.

Zur nähern Erläuterung des oben Ausgesprochnen wollen wir folgendes Beispiel wählen, welches zwar an und für sich in der Praxis geringere Bedeutung hat, aber immerhin geeignet ist, die gerügten Mißstände anschaulich zu machen.

Das Alter eines Bestandes sei mit alleiniger Rücksicht auf die prädominirenden Stammklassen $= A$ gefunden worden. Im folgenden Jahre wird dann der Bestand offenbar $A + 1$ Jahre alt geworden sein. Nach der obigen Formel kann das Alter aber mehr oder weniger betragen, je nachdem in diesem Jahre der laufend jährliche Zuwachs groß oder klein ausgefallen ist. Ersteres wird dann stattfinden, wenn der Sommer frisch, letzteres, wenn er trocken gewesen ist.

Wir hatten vorhin das mittlere Alter A_{III} der Flächen $f = 0{,}7$; $f' = 0{,}3$ für die Alter $a = 1$, $a' = 10$ zu 3.86403 Jahren gefunden. Im folgenden Jahre wird $a = 2$, $a' = 11$ sein. Die Formel gibt dafür das Alter $= 4.86247$, denn

$$\frac{m+m'}{\frac{m}{a}+\frac{m'}{a'}}=\frac{0,7\,.\,2,04+0,3\,.\,12,31}{0,7\,.\,1,02+0,3\,.\,1,11}=\frac{1,428+3,663}{0,714+0,333}=$$

$$=\frac{5,091}{1,047}=4,86247;$$

während $A_{III}=3,68403+1=4,86403$ sein sollte. Die Differenz ist also nicht = Null, sondern = 0,00156. Sie erscheint in diesem Beispiel unbedeutend, allein dies rührt blos daher, weil wir hier einen sehr einfachen Fall gewählt haben. Ist eine größere Reihe von Jahren verflossen, so wird der Unterschied viel größer werden, zumal wenn die Durchschnittszuwachse nicht, wie eben angenommen wurde, genau eine arithmetische Reihe einhalten.

Das Resultat der Formel wird nur dann mit der Wirklichkeit im Einklang stehen, wenn die in jener aufgeführten Werthe unabhängig von der Größe des laufendjährlichen Zuwachses sind.

Offenbar entscheidet über Quantität des Haubarkeitertrages durchaus nicht die Vertheilung des Zuwachses auf die Einzelnjahre, welche von der Begründung eines Holzbestandes bis zu der Zeit, wenn er gefällt wird, verfließen. Es könnte für uns ganz gleichgültig sein, ob der Holzzuwachs sich nach und nach anlegt, oder ob er auf einmal erfolgt, wie es geschehen würde, wenn die Bäume erst im Haubarkeitalter aus der Erde sich erhüben. Die gegenwärtige Holzmasse eines Bestandes berechnet sich daher aus dem künftigen Abtriebsertrag μ und aus dem Verhältniß, in welchem sein gegenwärtiges Alter a zu dem Alter u der Haubarkeit steht. Der Werth der gegenwärtigen Holzmasse ist daher $=\mu\,.\,\frac{a}{u}=\frac{\mu}{u}\,.\,a$; das heißt, er ist gleich dem Haubarkeitsdurchschnittszuwachse, multiplizirt durch das gegenwärtige

Alter. Dieser Ausdruck muß deßhalb anstatt m in die Formel eingeführt werden, wenn das Alter der zur Haubarkeit gelangenden Holzmasse festgestellt werden soll.

Analog ergeben sich für m′, m″.... die Werthe $\frac{\mu'}{u'}.a'$, $\frac{\mu''}{u''}.a''$.... und für die Durchschnittszuwachse $\frac{m}{a}$, $\frac{m'}{a'}$, $\frac{m''}{a''}$ die Werthe $\frac{\mu}{u}$, $\frac{\mu'}{u'}$, $\frac{\mu''}{u''}$....; die Formel lautet deßhalb

$$A = \frac{\frac{\mu}{u}.a + \frac{\mu'}{u'}.a' + \frac{\mu''}{u''}.a'' + \ldots.}{\frac{\mu}{u} + \frac{\mu'}{u'} + \frac{\mu''}{u''} + \ldots.}$$

Sie findet sich angegeben in einer Recension des vorerwähnten Schriftchens von Karl in der Allgemeinen Forst- und Jagdzeitung von 1847*). Sie wurde daselbst für die Cameraltaxe aufgestellt; allein alle Methoden bedürfen derselben, welche die Kenntniß künftiger Erträge nöthig haben, wie z. B. gerade das Fachwerk.

Es wird außerordentlich schwierig sein, die Werthe $\frac{\mu}{u}$, $\frac{\mu'}{u'}$.... numerisch zu erhalten. Man bedarf hierzu Ertragstafeln, die genau für die nämliche Holzart, Bonität u. s. w. aufgestellt sind, für welche die Holzaltersuntersuchung gemacht werden soll.

§. 24.

Hier kommt uns der eigenthümliche Gang des Holzzuwachses zur Hülfe, um die vorstehende Formel practisch anwendbar zu machen.

*) S. 462.

Es ist bekannt, daß in geschlossenen Hochwaldungen, für welche allein die Untersuchung eines mittlern Alters Werth hat, der durchschnittlich jährliche Zuwachs zwar in der Periode des vorherrschenden Längewachsthums der Bäume rasch steigt, allein gegen die Mannbarkeit hin, vor welcher der laufendjährliche Zuwachs schon abgenommen hat, in geringerem Maße sich vermehrt, in diesem Zeitpunkt, oder schon etwas früher, seinen Culminationspunkt erreicht und von da an wieder sehr langsam sinkt. Dieser Gang des Zuwachses ergibt sich (abgesehen von den concreten Zeitpunkten), wenn er nicht durch practische Untersuchungen festgestellt wäre, schon aus dem allgemeinen mathematischen Gesetze, wonach die Functionen in der Nähe des Maximums und Minimums sich wenig ändern. Es wird also auch der Durchschnittszuwachs eines Bestandes, welcher nicht weit vor oder hinter der Mannbarkeit steht, so ziemlich derselbe sein, und die Ausdrücke

$$\frac{\mu}{u} \cdot a, \quad \frac{\mu'}{u'} \cdot a', \quad \frac{\mu''}{u''} \cdot a'' \ldots \text{ und } \frac{\mu}{u}, \quad \frac{\mu'}{u'}, \quad \frac{\mu''}{u''} \ldots$$

werden mit

$$m, \; m', \; m'' \ldots \text{ und } \frac{m}{a}, \; \frac{m'}{a'}, \; \frac{m''}{a''} \ldots$$

verwechselt werden können.

Hierdurch erhalten wir einen neuen Vortheil. Wir sahen nämlich, daß die Formel

$$A_{III} = \frac{m + m' + m'' + \ldots}{\frac{m}{a} + \frac{m'}{a'} + \frac{m''}{a''} + \ldots}$$

nur dann das nämliche Resultat, wie die Tafel gibt, wenn die Durchschnittszuwachse sich gleich bleiben. Für den Fall, daß man anstatt der Formel

$$A = \frac{\frac{\mu}{u} \cdot a + \frac{\mu'}{u'} \cdot a' + \frac{\mu''}{u''} \cdot a'' + \ldots}{\frac{\mu}{u} + \frac{\mu'}{u'} + \frac{\mu''}{u''} + \ldots}$$

diejenige

$$A_{III} = \frac{m + m' + m'' + \ldots}{\frac{m}{a} + \frac{m'}{a'} + \frac{m''}{a''} + \ldots}$$

wählen kann, wird auch das Alter, bestimmt nach der Tafel, mit dem der Formel übereinstimmen. Letztere wird also dann auch das richtige Alter angeben.

Sollten die einzelnen Altersklassen einen schon fallenden Zuwachs besitzen, so kommen sie bei der Berechnung des mittlern Alters dann nicht in Ansatz, wenn ihre Massen gegen diejenigen der übrigen Altersklassen nicht bedeutend sind, weil sie ja in diesem Falle vor der Haubarkeit der vorherrschenden Klassen abgetrieben werden. Sind z. B. in einem Buchenbestand, wie man dies häufig findet, Eichenoberständer eingewachsen, welche kernfaul und deßhalb rückgängig im Zuwachs sind, so wird gewiß jeder einsichtige Forstmann diese sobald aushauen, als dies mit Rücksicht auf die Buchen nur möglich ist; man wird sie als Durchforstungsholz behandeln, aber keineswegs dieselben zur Altersbestimmung zuziehen. Sind dagegen solche Altersklassen mit fallendem Zuwachs der Masse nach die vorherrschenden, so wird von der Bestimmung eines mittlern Alters gänzlich Umgang genommen; man schreitet zum raschen Abtrieb und setzt die Zeit für denselben ohne Weiteres fest. In einige Verlegenheit kommt man dagegen bei der Erforschung des mittlern Alters jüngerer Bestände, welche weiter von der Mannbarkeit abstehen und sich noch in der Periode des steigenden Zuwachses befinden. Hier

gibt die Formel III. kein richtiges Resultat, denn es ist dann nicht erlaubt, die gegenwärtige Holzmasse mit derjenigen zu verwechseln, welche gleich dem Product aus dem Haubarkeitdurchschnittszuwachs in das Alter der einzelnen Klassen ist. Da indessen solche Bestände erst in fernen Perioden zum Abtrieb kommen und schon allein die Unsicherheit der Ertragseinschätzung eine spätere Revision des Zuwachses nöthig macht, so kann man mit letzterer zugleich die Altersbestimmung von Neuem vornehmen. Diese wird dann begreiflich um so genauer ausfallen, je weiter der fragliche Bestand gegen das Mannbarkeitalter hin vorgerückt ist.

§. 25.

Es ist früher geäußert worden, daß die Erforschung des mittlern Alters vorzüglich zu dem Zweck geschieht, um den Abstand des gegenwärtigen Alters von dem Zeitpunkt kennen zu lernen, in welchem eine erwartete Holzmasse erfolgt. Allein dieser Zweck wird nicht erreicht, wenn die Bestände oder die Altersklassen sich in der Periode des steigenden Zuwachses befinden. Wenn also ein gleichaltriger und ein ungleichaltriger Bestand gegenwärtig das nämliche mittlere Alter besitzen, so wird zu der Zeit, in welcher der gleichaltrige Bestand die erwartete Holzmasse liefert, der ungleichaltrige nicht ebenfalls denselben Holzertrag gewähren.

Denn soll die Fläche F eines gleichaltrigen Ajährigen Bestandes im Haubarkeitsalter 𝔄 abgetrieben werden, so müssen noch 𝔄 — A Jahre verfließen, bis das Holz zum Hieb kommt. Besitzt ein ungleichaltriger Bestand gegenwärtig ebenfalls das (mittlere) Alter A, so ist nicht ein Zeitraum von 𝔄 — A Jahren, sondern ein anderer x nöthig, damit dieser Bestand denselben Masseertrag aufzuweisen vermag, wie der gleichaltrige im Alter 𝔄.

x finden wir durch die Gleichung

$$\mathfrak{A} = \frac{f(a+x)(p+(a+x)q) + f'(a'+x)(p+(a'+x)q) + \ldots}{(f+f'+\ldots)(p+\mathfrak{A}q)};$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}F(p+\mathfrak{A}q) = {} & fa(p+aq) + f'a'(p+a'q) + \ldots \\ & + fx(p+aq) + f'x(p+a'q) + \ldots \\ & + faxq + f'a'xq + \ldots \\ & + fx^2q + f'x^2q + \ldots\end{aligned}$$

Nennen wir die gegenwärtige Holzmasse

$$fa(p+aq) + f'a'(p+a'q) + \ldots = M,$$

die Summe der wahren Durchschnittszuwachse der Klassen

$$f(p+aq) + f'(p+a'q) + \ldots = Z,$$

nennen wir weiter

$$faq + f'a'q + \ldots = (fa + f'a' + \ldots)q = N,$$

$$fq + f'q + \ldots = Fq, \text{ so ist}$$

$$\mathfrak{A}F(p+\mathfrak{A}q) = M + x(Z+N) + x^2Fq;$$

$$\mathfrak{A}\left(\frac{p}{q} + \mathfrak{A}\right) - \frac{M}{Fq} = x^2 + \frac{x(Z+N)}{Fq};$$

$$x = \sqrt{\mathfrak{A}\left(\frac{p}{q} + \mathfrak{A}\right) - \frac{M}{Fq} + \left(\frac{Z+N}{2Fq}\right)^2} - \frac{(Z+N)}{2Fq}.$$

Es sei beispielsweise $f = 0{,}5$; $f' = 0{,}5$; $a = 20$, $a' = 80$, $\mathfrak{A} = 100$; $p = 2$; $q = 0{,}01$, so ist

$$A = \sqrt{(0{,}5.20 + 0{,}5.80)\frac{2}{0{,}01} + 0{,}5.400 + 0{,}5.6400 + \frac{4}{4.0{,}0001}} - \frac{2}{2.0{,}01}$$

$$= \sqrt{10000 + 3400 + 10000} - 100 = 152{,}97 - 100 = 52{,}97.$$

$$\mathfrak{A} - A = 100 - 52{,}97 = 47{,}03.$$

Ferner ist:

$$fa(p+aq) + f'a'(p+a'q) + \ldots = M = 0{,}5.20(2+0{,}20) + 0{,}5.80(2+0{,}80)$$

$$= 10.2{,}2 + 40.2{,}8 = 22 + 112 = 134 \text{ St.};$$

$$f(p+aq) + f'(p+a'q) + \ldots = Z = 0{,}5.2{,}2 + 0{,}5.2{,}8 = 1{,}1 + 1{,}4 = 2{,}5$$

Stecken;

$$fa q + f' a' q + \ldots = N = 0{,}5.20.0{,}01 + 0{,}5.80.0{,}01 = 0{,}1 + 0{,}4 = 0{,}5$$

$$f q + f' q + \ldots = F q = 0{,}01;$$

$$x = \sqrt{100\left(\frac{2}{0{,}01} + 100\right) - \frac{134}{0{,}01} + \left(\frac{2{,}5 + 0{,}5}{2.0{,}01}\right)^2} - \frac{2{,}5 + 0{,}5}{2.0{,}01}$$

$$= \sqrt{30000 - 13400 + 22500} - 150 = \sqrt{39100} - 150 =$$

$$197{,}73 - 150 = 47{,}73.$$

Man muß also den ungleichaltrigen Bestand noch 47.73 Jahre lang stehen lassen (wobei natürlich vorausgesetzt wird, daß sowohl das 20=, als das 80jährige Holz bis zu seiner Haubarkeit regelmäßig durchforstet werde), damit er die nämliche Holzmasse produzirt, welche der gleichaltrige Bestand in nur 47.03 Jahren hervorbringt.

Will man die Größe $\mathfrak{A} - x$ nach der Formel

$$\mathfrak{A} - x = \frac{\frac{\mu}{u} . a + \frac{\mu'}{u'} . a' + \frac{\mu''}{u''} . a'' + \ldots}{\frac{\mu}{u} + \frac{\mu'}{u'} + \frac{\mu''}{u''} + \ldots}$$

berechnen, so ist darin $u, u', u'' \ldots$ das Alter der einzelnen Klassen bei dem mittlern Alter $\mathfrak{A}$ oder nach x Jahren, also $u = a + x$, $u' = a' + x$, $u'' = a'' + x \ldots$, ferner $\mu, \mu', \mu'' \ldots$ die Masse der einzelnen Klassen nach x Jahren im Alter $u = a + x$, $u' = a' + x \ldots$ Nun kennt man zwar $a, a', a'' \ldots$, allein $\mu, \mu', \mu'' \ldots$ sind vollständig unbekannt, weil man ja nicht weiß, welches der Werth von x ist; ebenso ist $\frac{\mu}{u}, \frac{\mu'}{u'}, \frac{\mu''}{u''} \ldots$ nicht gegeben. Man kann also aus der obigen Formel x nicht herleiten.

Nehmen wir dagegen an, die verschiedenen Klassendurch=schnittszuwachse $\frac{\mu}{u}, \frac{\mu'}{u'} \ldots$ seien, reduzirt auf die Flächeneinheit,

einander gleich und nennen wir den Durchschnittszuwachs der Flächeneinheit=1, so ist, wenn F=1, auch $\frac{\mu}{u} + \frac{\mu'}{u'} + \frac{\mu''}{u''} + \ldots = 1$ und unsere Formel verwandelt sich in folgende

$$\mathfrak{A} - x = \frac{\mu}{u} . a + \frac{\mu'}{u'} . a' + \ldots$$
$$= m + m' + m'' + \ldots$$
$$= A.$$

Also $\mathfrak{A} - x = A$.

Das nämliche Resultat erhält man, wenn in der vorhin zur Auffindung von x gegebenen Gleichung $q = 0$ gesetzt wird. Es ist nämlich dann:

$$\mathfrak{A} = \frac{f(a + x)p + f'(a' + x)p + \ldots}{Fp}$$
$$= \frac{fa + f'a' + \ldots + (f + f' + \ldots)x}{F}$$
$$= \frac{fa + f'a' + \ldots}{F} + x$$

Also $\mathfrak{A} = A + x$, $\mathfrak{A} - A = x$.

Hieraus geht hervor, daß, wenn der Durchschnittszuwachs als gleichbleibend angenommen wird, die Zeit, bis zu welcher ein gleichaltriger und ein ungleichaltriger Bestand, welche gegenwärtig dasselbe Alter A haben, eine bestimmte Holzmenge liefern, die nämliche für beide Bestände ist.

§. 26.

Professor Heyer hat in seiner Waldertragsregelung*) angegeben, man erhalte ein mit der Formel III. gleich oder doch

---

*) S. 119.

sehr nahe stehendes Resultat, wenn man nur einen Stamm nach der arithmetisch mittlern Kreisfläche aller prädominirenden Bäume aussuche, davon einige Exemplare fällen lasse, und aus ihren Altern das arithmetische Mittel nehme.

Diese Methode kann unter zweierlei Umständen richtige Resultate liefern.

1. Denkt man sich, alle Stämme oder doch alle Stammklassen besäßen (letztere pro Flächeneinheit) gleichen Durchschnittszuwachs und bezeichnet man diesen mit d, so ist, wenn $A, A', A'' \ldots$ die Alter, $a, a', a'' \ldots$ die Stammzahlen der Klassen bedeuten, und wenn $\mathfrak{A}$ das mittlere Alter des ganzen Bestandes vorstellt,

$$aAd + a'A'd + a''A''d + \ldots$$
$$= \text{der Masse des ganzen Bestandes.}$$

Diese ist aber auch $= \mathfrak{A}\,(a + a' + a'' + \ldots)\,d$, also

$$aAd + a'A'd + a''A''d + \ldots$$
$$= \mathfrak{A}\,(a + a' + a'' + \ldots)\,d, \text{ oder}$$
$$aA + a'A' + a''A'' + \ldots = \mathfrak{A}\,(a + a' + a'' + \ldots),$$

woraus

$$\mathfrak{A} = \frac{aA + a'A' + a''A'' + \ldots}{a + a' + a'' + \ldots} \text{ folgt.}$$

Das heißt: man erhält, unter die Voraussetzung, daß d constant ist, das mittlere Bestandsalter, wenn man die Stammzahlen der Klassen durch die zugehörigen Alter multiplizirt, die Producte addirt und die erhaltene Summe durch die Gesammtstammzahl dividirt.

Da $d\mathfrak{A}$ der Holzgehalt des mittlern Modellstamms ist, so gibt uns dieser Stamm auch wirklich das mittlere Alter $\mathfrak{A}$ an.

2. Ist der Durchschnittszuwachs der einzelnen Klassen nicht gleich pro Flächeneinheit, so hat man die Gleichung

$$aAd + a'A'd' + a''A''d'' + \ldots = \mathfrak{A}\,(a + a' + a'' + \ldots)\,\mathfrak{d}.$$

Auch diese Gleichung kann bestehen, und zwar,

a) wenn d, d′, d″.... zufällig solche Werthe besitzen, daß das erste Glied der Gleichung gleich dem zweiten wird;

b) wenn, unter der Voraussetzung, daß der Durchschnittszuwachs eine Function des Alters ist, diese Function die Gestalt

$$d = D - c + \frac{A}{a} c$$

annimmt.

Hier bedeuten d, D die zu den Altern a, A gehörenden Durchschnittszuwachse, welche durch Beobachtung gegeben sein müssen. c ist eine Constante, welche sich aus der Gleichung numerisch bestimmen läßt, wenn man statt d, D, a, A concrete Werthe einführt.

Wir haben nicht mehr nöthig, zu beweisen, warum diese Function stattfinden muß, weil der Fall, den wir hier betrachten, analog einem frühern (§. 2) ist, in welchem es sich um die Bestimmung des Modellstamms aus der arithmetisch mittlern Kreisfläche handelte und wir dort bereits auseinandergesetzt haben, wie die fragliche Function sich herleitet.

Uebrigens versteht es sich wohl von selbst, daß die Function $d = D - c + \frac{A}{a} c$ nicht allein genügt, um ein richtiges Alter zu verschaffen. Es ist dazu erforderlich, daß der nach der arithmetisch mittlern Kreisfläche ausgewählte Modellstamm das wahre Modell aller Stämme sei. Es muß also auch noch die Function

$$p = P - c + \frac{G}{g} c$$

bestehen.

§. 27.

Die Resultate, welche sich aus den Untersuchungen über das mittlere Alter herleiten, sind folgende:

1. Das Alter der gegenwärtigen Holzmasse eines ungleichaltrigen Bestandes ergibt sich

   a) für nach irgend einem Gesetz erfolgenden Zuwachs durch die Gleichung

$$A_{I'} = \frac{f\varphi(a)\,a + f'\varphi(a')\,a' + f''\varphi(a'')\,a'' + \ldots}{\varphi(A_{I'})\,F}$$

   wobei also angenommen wird, daß der in irgend einem Jahr sich ergebende Durchschnittszuwachs eine bekannte stetige Function des Alters sei.

   b) für gleichmäßig fallenden oder steigenden Zuwachs durch die Gleichung

$$A_{VI} = \frac{f(p + aq)a + f'(p + a'q)a' + f''(p + a''q)a'' + \ldots}{(p + A_{VI}q)\,F}$$

   c) für ganz unregelmäßig erfolgenden Zuwachs dadurch, daß man nachsieht, welches Alter der Masse des ungleichaltrigen Bestandes in einer für einen gleichaltrigen Bestand von der nämlichen Bonität u. s. w. entworfenen Ertragstafel entspricht und dieses für das mittlere Alter des ungleichaltrigen Bestandes gelten läßt.

2. Die Formeln Carl Heyer's und Smalian's sind identisch.

3. Gümbel's Formel ist auf die Voraussetzung gegründet, daß die Durchschnittszuwachse der Massen m, m', m''...., auf die Flächeneinheit reduzirt, sich gleich seien.

4. Unter der nämlichen Voraussetzung sind die Formeln von Heyer, Smalian und Gümbel identisch.

5. Sowohl für eine nach dem Gesetz des steigenden, als des fallenden Durchschnittszuwachses laufende Ertragstafel ist das Alter, bestimmt nach Heyer's und Smalian's Formel größer, als das wahre mittlere Alter der gegenwärtigen Holzmasse.

6. Sind die Durchschnittszuwachse der Altersklassen, reduzirt auf die Flächeneinheit, einander gleich, so geben auch Heyer's

und Smalian's Formel das wahre mittlere Alter der gegenwärtigen Holzmasse an.

7. Das gegenwärtige Alter der Haubarkeitmasse erfährt man nach den Formeln Heyer's und Smalian's, wenn in dieselben anstatt des gegenwärtigen Durchschnittszuwachses der Haubarkeitsdurchschnittszuwachs eingeführt wird, indem also die Massen nicht nach ihrem gegenwärtigen Betrag, sondern als Producte aus dem Haubarkeitsdurchschnittszuwachse in das gegenwärtige Alter der Klassen veranschlagt werden.

8. Für diejenige Bestandsaltersperiode, in welcher die Durchschnittszuwachse der Altersklassen auf der Flächeneinheit einander gleich sind, geben die Formeln Heyer's und Smalian's bei Belassung des gegenwärtigen Durchschnittszuwachses und der gegenwärtigen Masse das jetzige Alter der Haubarkeitmasse an.

9. Die Formeln Heyer's, Smalian's und Gümbel's liefern das richtigste Resultat für Bestände, welche im Mannbarkeitalter oder nicht weit vor oder hinter demselben stehen.

10. Ein gleichaltriger und ein ungleichaltriger, gegenwärtig mit der nämlichen Holzmasse und dem nämlichen (mittlern) Alter versehener, Bestand werden nur dann nach Verfluß einer gleichen Reihe von Jahren dieselbe Holzmasse enthalten, wenn der Durchschnittszuwachs beider sich gleich bleibt.

11. Die Formeln Heyer's und Smalian's reichen zur Altersbestimmung für den forstwirthschaftlich practischen Gebrauch vollständig aus.

12. Die Bestimmung des mittlern Alters eines ungleichaltrigen Bestandes aus dem Alter des mit der arithmetisch mittlern Kreisfläche versehenen Modellstamms liefert nur dann richtige Resultate, wenn die Function $d = D - c + \frac{A}{a} c$ besteht.

Die Zuwachsberechnung.

nach Smalian's Formel das wahre mittlere Alter der gegenwärtigen Holzmasse an.

7. Das gegenwärtige Alter der Haubarkeitmasse erfährt man nach den Formeln Heyer's und Smalian's, wenn in dieselben anstatt des gegenwärtigen Durchschnittszuwachses der Haubarkeitsdurchschnittszuwachs eingeführt wird, indem also die Massen nicht nach ihrem gegenwärtigen Betrag, sondern als Producte aus dem Haubarkeitsdurchschnittszuwachse in das gegenwärtige Alter der Klassen veranschlagt werden.

8. Für diejenige Bestandsaltersperiode, in welcher die Durchschnittszuwachse der Altersklassen auf der Flächeneinheit einander gleich sind, geben die Formeln Heyer's und Smalian's bei Anwendung des gegenwärtigen Durchschnittszuwachses [illegible] das jetzige Alter der Haubarkeitsmasse [illegible].

9. Die Formeln Heyer's, Smalian's und Glümbel's liefern das richtige Resultat für Bestände, welche im Haubarkeitsalter oder nicht weit vor oder hinter demselben stehen.

10. Ein gleichaltriger und ein ungleichaltriger, gegenwärtig mit der nämlichen Holzmasse und dem nämlichen (mittlern) Alter versehener Bestand werden nur dann nach Verfluß einer gleichen Reihe von Jahren dieselbe Holzmasse enthalten, wenn der Durchschnittszuwachs beider sich gleich bleibt.

11. Die Formeln Heyer's und Smalian's reichen zur Altersbestimmung für den forstwirthschaftlich practischen Gebrauch vollständig aus.

12. Die Bestimmung des mittlern Alters eines ungleichaltrigen Bestandes aus dem Alter des mit der arithmetisch mittlern [illegible] Modellstammes liefert nur dann richtige Resultate, wenn die Function $d = D - c + \frac{A}{a} c$ besteht.

III.

Die Zuwachsberechnung.

§. 28.

Zur Betriebsregulirung und zur Kapitalwerthberechnung der Waldungen ist die Vorausbestimmung künftiger Erträge nöthig.

Die Frage, welche Masse M ein gegenwärtig ajähriger Holzbestand nach u Jahren liefern werde, beantwortet sich ganz einfach dadurch, daß man sagt: M muß gleich sein der im Alter a vorfindlichen Holzmenge m, vermehrt um den Zuwachs Z, welcher vom aten bis zum uten Jahr noch erfolgt.

Wie m ermittelt wird, ist im I. Abschnitt gezeigt worden. Es handelt sich nun noch darum, den Zuwachs Z ausfindig zu machen.

Dazu sind hauptsächlich zwei Verfahren in Vorschlag gebracht worden, die, trotz ihrer großen Mangelhaftigkeit, bis in die jüngste Zeit sich Anhänger erhalten haben.

1. Um den sogenannten Massezuwachs eines Bestandes zu erfahren, soll man die Klassenmodellstämme (oder auch den Modellstamm, wenn nämlich vorausgesetzt wird, daß der mit der arithmetisch mittlern Kreisfläche versehene Stamm das Mittel aus den Inhalten aller Stämme sei) in Sectionen zerlegen und den Holzgehalt der letztern berechnen. Fig. 6

stellt eine solche Section vor. Offenbar ist der Zuwachs, welcher innerhalb der letzten n Jahre stattfand, vorgestellt durch einen Hohlkegel, dessen verticaler Durchschnitt acCA + dbBD ist. Und es ist dieser Zuwachs gleich dem Inhalt M der Section, vermindert um den Massengehalt des Theils derselben, dessen oberer Durchmesser cd, dessen unterer Durchmesser CD, dessen Länge H ist. cd ergibt sich, indem von dem Durchmesser ab die doppelte Breite der letzten n Jahrringe in Abzug gebracht wird; es ist also $cd = ab - (ac + db)$; ebenso ist $CD = AB - (AC + DB)$.

Betrachtet man die Section als Theil eines parabolischen Kegels, so drückt sich ihr Inhalt M durch die Formel

$M = \left(\frac{\pi AB^2}{4} + \frac{\pi ab^2}{4}\right)\frac{H}{2}$ aus; der Inhalt des Stücks

cdDC ist $= \left(\frac{\pi cd^2}{4} + \frac{\pi CD^2}{4}\right)\frac{H}{2}$; also Massezuwachs innerhalb

der letzten n Jahre $= Z = \frac{\pi H}{8}\left[AB^2 + ab^2 - (cd^2 + CD^2)\right]$.

Da der Inhalt eines abgestutzten parabolischen Kegels sich auch durch Multiplication der in der halben Sectionslänge befindlichen Kreisfläche mit der ganzen Sectionslänge ergibt, so ist auch

$$Z = \left(\frac{\pi FK^2}{4} - \frac{\pi GJ^2}{4}\right)H = \frac{\pi}{4}(FK^2 - GJ^2)\,H.$$

Werden in der nämlichen Weise die Zuwachse aller Sectionen berechnet, so ist deren Summe, multiplizirt mit der Stammzahl der Klasse, gleich dem Massenzuwachs der letztern. Durch Addition aller Klassenzuwachse ergibt sich der Massenzuwachs des ganzen Bestandes.

Es wird von Vielen angenommen, der während der letzten n Jahre erfolgte Massezuwachs sei gleich dem Zuwachs für die nächsten n Jahre.

Diese Annahme ist eine irrige. Offenbar ist der Massezuwachs nichts Anderes, als der periodische laufendjährliche Zuwachs. Die angegebene Unterstellung würde demnach nur dann sich rechtfertigen, wenn der laufendjährliche Zuwachs für alle Lebensalter eines Bestandes der nämliche bliebe, was ausweislich aller Ertragsuntersuchungen nicht der Fall ist.

Der laufendjährliche Zuwachs geschlossener Bestände steigt bis zur Periode des vorherrschenden Längenwachsthums. Nach Ablauf dieser beginnt er zu sinken.

Die Berechnung des künftigen Zuwachses eines Bestandes mit Zugrundlegung des sogenannten Massezuwachses muß daher für Lebensalter, welche vor dem Culminationspunkt des Längewachsthums liegen, ein zu kleines, für solche Alter dagegen, welche hinter diesen Zeitpunkt fallen, ein zu großes Resultat geben.

2. Der sogenannte Stärkezuwachs wird auf folgende Art gefunden. Man setzt den Durchmessern ab und AB die doppelte Breite der letzten n Jahrringe zu (Fig. 7), berechnet für die dadurch entstehenden neuen Durchmesser a′b′ und A′B′ die Kreisflächen und aus diesen und der Länge H den Inhalt M′ der Section. Unter Voraussetzung der parabolischen Form ist $M' = \frac{\pi}{8}\,(A'B'^2 + a'b'^2)\,H$. Der Zuwachs in den nächsten n Jahren soll nun $= M' - M = Z' =$

$$= \frac{\pi}{8}\,H\,[A'B'^2 + a'b'^2 - (AB^2 + ab^2)]$$ sein.

Auch die Zugrundlegung des Stärkezuwachses für den künftigen Zuwachs eines Bestandes ist zu verwerfen. Da der äußere

Hohlkegel, aus dem der Stärkezuwachs besteht, immer mehr Masse hat, als der innere von der nämlichen Ringbreite, so wird also bei diesem Verfahren stets angenommen, daß der Zuwachs der nächsten n Jahre unter allen Umständen größer sei, als derjenige der vorangegangenen n Jahre. Man unterstellt daher, daß der laufendjährliche Zuwachs stets im Steigen begriffen sei, was natürlich in der Wirklichkeit nicht stattfindet.

Wollte man aber auch den in den nächsten n Jahren sich anlegenden Jahrringen eine geringere Breite geben, wobei etwa auf die abnehmende Breite der letzten Jahrringe und auf das Alter des Bestandes Rücksicht zu nehmen wäre, so würde das dargestellte Verfahren dadurch doch nicht viel korrecter und zuverlässiger werden, weil über das Gesetz der Stärkezunahme der Bäume zu wenig Erfahrungen vorliegen.

Ueberdies können die beiden, unter 1. und 2. genannten, Methoden der Zuwachsberechnung dann niemals ein auch nur den gemachten Voraussetzungen entsprechendes Resultat liefern, wenn die Zuwachsermittlung nur an solchen Stämmen stattfindet, welche mit der arithmetisch mittlern Kreisfläche behaftet sind, weil diese Stämme weder in frühern Jahren Modellstämme waren (in diesen gehörten sie den stärkern Klassen an), noch in spätern Jahren es sein werden (in den letztern fallen sie den Durchforstungen anheim).

Die Berechnung des Stärke- und Massezuwachses ist, insbesondere für das Reisholz und das Wurzelholz, bei größern Taxationen gar nicht ausführbar. Wenn man irgend etwas im Forstwesen unpractisch nennen kann, so ist es das eben angegebene Verfahren. Ohnedies lassen sich bei manchen Holzarten, z. B. Aspen, Birken die Jahrringe oft gar nicht mit Bestimmtheit erkennen.

§. 29.

Ein drittes Verfahren zur Ermittlung des Zuwachses stützt sich auf die Voraussetzung, daß beim Holz Zuwachs von Zuwachs erfolge. Es sei m die Masse eines Bestandes im Alter a, p das Zuwachsprozent, so ist die Masse m′ im Alter u =

$$m' = m\left(\frac{100 + p}{100}\right)^{u-a}$$

Um dieses Verfahren practisch zu machen, muß p aufgesucht werden. Dazu ist es nöthig, die Massen eines Bestandes in zwei verschiedenen Altern aufzunehmen.

Die Vorausbestimmung künftig eingehender Holzerträge mittelst der obigen Formel ist übrigens nur dann richtig, wenn wirklich die Holzkapitalien nach Zinseszinsen sich vermehren. Letzteres ist aber nicht der Fall.

Nehmen wir die erste beste Ertragstafel, welche uns in die Hände fällt, z. B. eine von Cotta über den Ertrag der Rothbuche auf sehr guten Standorten, berechnen wir die Differenzen der Massen, so ergibt sich auf den ersten Blick, daß jene, wenn sie auch in ihrem Betrag einander nicht völlig gleichstehen, doch nicht soweit verschieden sind, daß nicht die Massen selbst als Glieder einer arithmetischen Reihe betrachtet werden könnten.

Jahr	Masse	Differenz
40	2132	
		1654
60	3786	
		1822
80	5608	
		1882
100	7490	
		1882
120	9372	
		1702
140	11074	

Es geht aber hieraus hervor, daß das Holz nach einfachen, aber nicht völlig gleichen, Zinsen zuwächst. Als Kapital darf indessen nicht das Holz selbst (denn dies ist ja im Jahr 0 noch nicht vorhanden), sondern es muß als solches der Boden angesehen werden. An ihm legt sich also das Holz, so wie einfache Zinsen an einem Geldkapitale, an.

Die Reihe für einfache Zinsen ist folgende:

$$\frac{K.p}{100}, \frac{K.2p}{100}, \frac{K.3p}{100} \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{K.np}{100}$$

Nennen wir das erste Glied $\frac{K.p}{100} = a$, die ständige Differenz $\frac{K.p}{100} = d$, so nimmt die vorstehende Reihe die allgemeine Form der arithmetischen Reihe

$$a, a + d, a + 2d \ldots\ldots\ldots\ldots a + (n - 1) d$$

an.

Die von einem Geldkapitale sich ergebenden Zinsen bilden dagegen eine geometrische Reihe, welche lautet

$$K.\frac{p}{100}, K\left(\frac{p}{100}\right)^2, K\left(\frac{p}{100}\right)^3 \ldots\ldots\ldots K\left(\frac{p}{100}\right)^n$$

Bezeichnet man hier das erste Glied $K.\frac{p}{100}$ mit a, den Quotienten $\frac{p}{100}$ mit q, so nimmt die vorstehende Reihe die allgemeine Form der geometrischen Reihe

$$a, aq, aq^2 \ldots\ldots\ldots\ldots aq^{n-1}$$

an.

Wenn nun, wie vielfach behauptet wird, das Holz nach Doppelzinsen zuwüchse, so müßten die Massen eine geometrische Reihe von Jahr zu Jahr einhalten.

In der obigen Ertragstafel von **Cotta** ist $q = \frac{3786}{2132} = 1.7758$;

leiten wir daraus die übrigen Glieder her, so müßten die Massen betragen:

im Jahr	40	60	80	100	120	140
Massen	2132	3786	6723	11939	21201	37649

Diese Zahlen weichen aber wesentlich von den durch Cotta gefundenen ab. Man kann hier allerdings den Einwurf erheben, die Cotta'schen Tafeln seien nicht auf wirkliche Ertragsuntersuchungen basirt, sondern fingirt; jede andere Ertragstafel ist übrigens nach demselben Gesetze gebaut.

Die Berechnung des Zuwachses oder der Abtriebserträge nach der Formel

$$m' = m \left(\frac{100 + p}{100}\right)^{u - a}$$

ist demnach fehlerhaft.

Aber auch dann, wenn man annimmt, das Zuwachsprozent bleibe sich nicht gleich, sondern ändere sich fortwährend, erhält man durch Anwendung der Doppelzinsrechnung ganz unrichtige Resultate, wie dies ja immer stattfinden muß, wenn zwischen zwei Gliedern einer arithmetischen Reihe (welche die Holzmassen unzweifelhaft befolgen) nach dem Gesetz der geometrischen Reihe interpolirt wird.

Da der Grundsatz, beim Holz erfolge Zuwachs von Zuwachs, in fast allen Lehrbüchern der Waldwerthrechnung gepredigt wird und auch die Basis von manchen Waldertragsregelungsmethoden, z. B. der ältern von Karl, bildet, so sehen wir uns veranlaßt, über diese ganz fehlerhafte Vorstellungsweise, die in unserer Wissenschaft schon sehr viel Unheil angerichtet hat, noch Folgendes zu bemerken.

Obgleich das Massenfachwerk seiner Idee nach auf der Unterstellung beruht, daß die Holzkapitalien nicht Zinsen bringen, sondern selbst als Zinsen zu betrachten sind, so haben sich doch

viele Anhänger dieses Verfahrens, um gewisse Inconvenienzen desselben zu entschuldigen, zu dem Ausspruch verleiten lassen, das Holz wüchse nach Zinseszinsen zu. Das reine Massenfachwerk vertheilt bekanntlich Ueberschüsse über den normalen Vorrath auf eine ganze Einrichtungszeit oder Umtriebszeit hin. Wenn nun der Holzzuwachs nicht abermals Zuwachs bringt, so liegt auch am Tage, daß mit der spätern Nutzung von solchen Ueberschüssen ein Zinsenverlust verknüpft ist, dem man entgehen könnte, wenn das zur Einhaltung des normalen Etats nicht nöthige Materialkapital aus dem Walde genommen, in Geld umgeschlagen und ausgeliehen würde. Die starren Massenfachwerker, welche wohl einsehen, daß die von ihnen befolgte Methode durch Anerkennung dieser Wahrheit in ihren Grundfesten erschüttert werden würde, behaupten nun, mit der Aufschiebung der Nutzung von Ueberschüssen über den normalen Vorrath sei deßhalb kein Verlust verbunden, weil diese letztern ja nicht todt seien, sondern selbst wieder Zuwachs brächten.

Um diese irrige Ansicht zu widerlegen, nehmen wir an, ein Wald befinde sich im Normalzustand, d. h. er besitze die regelmäßige Altersstufenfolge, Schlagreihe und den normalen Zuwachs, mithin auch den normalen Vorrath. Der Abtriebsertrag eines Schlags sei $= m$, die Umtriebszeit u, so ist der Haubarkeitsdurchschnittszuwachs eines jeden Schlags $= \frac{m}{u}$, also der Zuwachs der ganzen Schlagreihe $= \frac{m}{u} . u = m$. Nun werde unterstellt, irgend ein Schlag besitze ein höheres Alter, als das ihm nach seiner Stellung in der normalen Schlagreihe zukommende. Offenbar wird der Haubarkeitsdurchschnittszuwachs dieses Schlags kein anderer sein, als $\frac{m}{u}$. Der Zuwachs der ganzen Schlagreihe ist

also wieder $= \frac{m}{u} \cdot u = m$. Durch das höhere Alter dieses Schlags war aber ein Ueberschuß über den normalen Vorrath bedingt; wir sehen, daß dieser nicht auch eine Erhöhung des normalen Zuwachses zur Folge hat.

Es gibt sogar Fälle, in denen eine Vermehrung des Vorraths eine Verminderung des Zuwachses herbeiführt. Die normale Umtriebszeit, bei welcher ein Durchschnittszuwachs von z Stecken sich ergeben soll, sei = 100, nehmen wir an, sämmtliches Holz sei 140 Jahre alt, so ist ein größerer Betrag als der des normalen Vorraths vorhanden. Der Zuwachs z', berechnet für das 140te Jahr ist aber bei allen Holzarten (natürlich für geschlossene Bestände) kleiner, als der im 100ten Jahr stattfindende z. Die Vermehrung des Vorraths hat also in diesem Beispiel sogar eine Schmälerung des Zuwachses in ihrem Gefolge.

§. 30.

Wir haben vorhin gesehen, daß der Holzzuwachs nach dem Gesetz einer arithmetischen Reihe stattfindet. Wollte man künftige Erträge ermitteln, so brauchte man daher nur die Differenz dieser Reihe aufzusuchen. Aus dieser ließen sich dann alle Glieder der letztern ableiten. Da aber die Unterschiede der einzelnen Glieder der Massenreihe nicht völlig gleichstehen und die Abweichungen eine für die Praxis nicht unbedeutende Größe besitzen, so ist auch dieses Verfahren mangelhaft. Wir müssen uns daher nach einer andern Methode zur Zuwachsbestimmung umsehen.

Es erscheint vortheilhaft, die Abtriebsmasse nicht aus der gegenwärtigen Holzmasse und dem daran erfolgenden Zuwachs, sondern in einem Ansatz zu berechnen.

Nachstehende Ausführung gibt dazu Anleitung.

Der Zuwachsgang einer Holzart läßt sich durch eine Curve darstellen, deren Abscissen die fortschreitenden Altersjahre, deren Ordinaten die den letztern entsprechenden Durchschnittszuwachse bezeichnen. Indem man die Endpunkte der Ordinaten durch einen Zug aus freier Hand verbindet, erhält man die Curve.

Wären, wie Cotta meint, die Zuwachscurven einander ähnlich (Fig. 8), so hätte die Zuwachsermittlung wenig Schwierigkeiten. Es genügte alsdann die für eine einzige Bonität entworfene Curve, um die Erträge für alle andere Bonitäten zu finden. Man hätte nur den jetzigen Durchschnittszuwachs z des zu bonitirenden Bestandes zu untersuchen, den Quotienten zwischen ihm und dem Durchschnittszuwachs Z der einmal aufgestellten Curve für das nämliche Alter zu bilden, mit $\frac{z}{Z}$ den Durchschnittszuwachs Z′ der Normalcurve für das betreffende Jahr zu multipliziren, um so die gewünschte Größe z′ des Ertrags für ein künftiges Alter zu erhalten.

Es sei z. B. der Durchschnittszuwachs eines gegenwärtig 40jährigen Kiefernbestandes für das 100te Jahr zu ermitteln. Die Normalcurve habe im 40ten Jahr den Durchschnittszuwachs $Z = 59.40$ Kubikfuße, im 100ten $Z' = 65.74$; der zu bonitirende Bestand besitze gegenwärtig (also im 40ten Altersjahre) den Durchschnittszuwachs $z = 26.72$. Es wäre alsdann der Durchschnittszuwachs z′ unseres Bestandes im 100ten Jahr

$$= \frac{z}{Z} . Z' = \frac{26.72}{59.40} . 65.74 = 29.57 \text{ Kubikfuße.}$$

Schon die wenigen Erfahrungen, welche man über den Wachsthumsgang der Baumhölzer besitzt, haben gelehrt, daß die Zuwachscurven einander nicht ähnlich sind. Das Gesetz des Laufes dieser Linien weicht nicht allein für die verschiedenen Holzarten, sondern auch innerhalb jeder Holzart für die verschiedenen Bonitäten merklich ab.

Auf Boden von geringerer Güte ist nicht blos der Haubarkeitsertrag kleiner, als auf einem bessern Standort, nein, auch der höchste Durchschnittszuwachs tritt früher auf ersterem ein, als auf letzterem.

Wir sind deßhalb nicht im Stande, aus einer einzigen Zuwachscurve alle übrigen herzuleiten; jeder Bestand — kann man annehmen — besitzt einen eigenthümlichen Wachsthumsgang.

Soll nun der im Jahr u erfolgende Ertrag eines jetzt ajährigen Bestandes erforscht werden, so heißt dies nichts Anderes, als die Curve aufsuchen, deren Lauf der Durchschnittszuwachs unseres Bestandes verfolgen wird. Den Ertrag findet man alsdann, wenn man die Ordinate $y = b$ für das Alter $x = u$ abgreift.

Es sind drei Fälle zu unterscheiden:

1. Der Bestand steht im Alter der Mannbarkeit er hat dasselbe überschritten, oder er befinde sich nicht weit vor demselben.
2. Er hat ein mittleres Alter.
3. Er ist ganz jung, oder der Boden ist Blöße.

Im ersten Fall geschieht die Bonitirung ganz einfach durch Erhebung des gegenwärtigen Durchschnittszuwachses d des betreffenden Districtes. Es ist $d = \frac{m}{a}$. Man sucht nun unter den Zuwachscurven, welche man entworfen hat, diejenige aus, welche für das nämliche Alter a den nämlichen Durchschnittszuwachs d besitzt. Ihr $y = b$ für das Alter $x = u$ ist auch der Durchschnittszuwachs unseres Bestandes im Alter u.

Sind nur wenige Curven verzeichnet worden, so kann leicht der Fall sich ereignen, daß man keine Curve findet, welche für das Alter a den Durchschnittszuwachs d besitzt. In dieser Lage ist man darauf beschränkt, diejenige Curve aufzusuchen, deren

Durchschnittszuwachs d′ im Alter a unserm d am nächsten kommt, oder die Zuwachsbestimmung so lange auszusetzen, bis man mehr Erfahrungen gesammelt hat. Wer diese nicht besitzt, kann ja ohnedies kein Geschäft der Waldertragsregelung vornehmen.

Je mehr Curven verzeichnet sind, mit um so mehr Sicherheit kann bonitirt werden. Das will sagen: je mehr wirkliche Ertragsuntersuchungen wir angestellt haben, mit um so größerer Zuverlässigkeit vermögen wir, künftige Erträge einzuschätzen.

Immerhin könnten übrigens bei diesem Verfahren irrige Resultate sich ergeben, wenn zwei Curven sich denken ließen, welche, obgleich sie im Alter a den nämlichen Durchschnittszuwachs d besäßen, doch im Alter u verschiedene Durchschnittszuwachse δ', δ'' hätten.

Dieser Fall kann wohl vorkommen; doch mögen die Differenzen zwischen δ' und δ'' nur klein sein. Gegen das Mannbarkeitsalter hin ist gemeiniglich der Haupthöhewuchs vollendet; alle Factoren der Bodenfruchtbarkeit haben ihre volle Wirkung geäußert; es ist nicht anzunehmen, daß nach diesem Zeitpunkt neue Influenzen auftreten, welche den Gang des normalen Zuwachses alteriren könnten.

Die Stabilität des Durchschnittszuwachses, der kurz vor der Mannbarkeit nur langsam steigt, dann längere Zeit hindurch sich gleich bleibt und hierauf ganz allmälig fällt, deutet schon darauf hin, daß die im Boden und in der Atmosphäre thätigen Kräfte vor dem Mannbarkeitsalter sich schon ausgesprochen haben.

Größere Schwankungen um diesen Zeitpunkt herum können aber schon deßhalb nicht wohl eintreten, weil bekanntlich spätestens mit dem Mannbarkeitsalter der Durchschnittszuwachs seinen größten Werth erreicht und, wie schon früher (§. 23) bemerkt wurde, die Functionen in der Nähe des Maximums und Minimums nur allmählig zu- oder abnehmen. Es ist deßhalb auch schon die Vorschrift gegeben worden, ältere, dem Mannbarkeits-

alter nahe stehende, Bestände in der Weise zu bonitiren, daß ohne Weiteres der jeweilige Durchschnittszuwachs auch für den künftigen Abtriebsertrag zu Grunde gelegt wird.

Zur Bonitirung solcher Bestände, welche noch nicht in das Mannbarkeitsalter getreten sind, leistet das oben angegebene Verfahren immer nützliche Dienste. Aber es reicht nicht aus, um Erträge für eine fernere Folgezeit zu veranschlagen.

Es kommt häufig vor, daß zwei Bestände bis zu mittlern Altern hin gleichen Durchschnittszuwachs besitzen, von da an aber plötzlich in ihrem Wachsthumsgang von einander abweichen. Als Beispiel sollen die Waldungen eines in der Nähe von Gießen gelegnen Berges von circa 1800 Fuß Meereshöhe angeführt werden. Bis zum 50—60ten Jahre halten die Bestände am Fuße dieses Berges und die auf dem flachgründigen westlichen Abhang befindlichen gleichen Schritt im Wachsthumsgang (Fig. 9), die vor der Sonne geschützten Bodenlagen erhalten sich frisch; die Feuchtigkeit vermag den Mangel an Tiefgründigkeit zu ersetzen. Von dem genannten Alter an ändert sich aber das gegenseitige Verhältniß an Zuwachs; die Stangenhölzer auf dem Berge sitzen auf dem Felsen, welcher den Untergrund bildet und in geringer Tiefe unter der Dammerde hinstreicht, auf, während die Wurzeln der Bäume im Thal kein Hinderniß für ein tieferes Eindringen finden. Der Zuwachs der auf dem Bergabhang befindlichen Waldungen beginnt zu sinken, während derjenige der Thalbestände noch lange Zeit hindurch auf der nämlichen Stufe sich erhält.

Die Kenntniß der Ordinate des Durchschnittszuwachses genügt also nicht, um für Bestände mittlern Alters die entsprechende Curve auswählen zu können.

Man hat hier noch andere Untersuchungen anzustellen.

Es läßt sich denken, der Lauf der Zuwachscurve werde durch eine Gleichung regiert. Der Durchschnittszuwachs y wäre in

dieser eine Function des variablen Alters x und derjenigen Factoren, welche die Holzerzeugung bedingen, nämlich des Bodens b, der Lage l und des Klimas k. Für eine und dieselbe Localität sind b, l, k constante durch specielle Untersuchungen zu ermittelnde Größen. Die Gleichung des Zuwachses würde lauten:

$$y = f[(b, l, k), x]$$

Wenn also nicht allein der Durchschnittszuwachs y, sondern auch Boden, Lage und Klima unseres zu bonitirenden Bestandes mit den nämlichen Werthen irgend einer der Curven, welche wir erfahrungsmäßig aufgestellt haben, zusammenfielen, so wäre diese Curve diejenige, welche den Wachsthumsgang unseres Bestandes angibt.

Nach dem gegenwärtigen Stand unserer Kenntnisse in der forstlichen Bodenkunde und Klimatologie ist die Untersuchung des Bodens, der Lage und des Klimas eine sehr schwierige. Die Ermittlung des Durchschnittszuwachses gibt uns aber ein Mittel an die Hand, um fehlerhafte Bestimmungen der Bodengüte, des Einflusses der Meteore u. s. w. zu controliren.

Bei ganz jungen Beständen ist die Aufnahme des Zuwachses zum Zweck der Einschätzung des Haubarkeitsertrags von sehr geringem Nutzen; ja sie kann, wenn man ihr Bedeutung beilegt, zu ganz unrichtigen Bonitirungen führen. Manche Factoren der Bodengüte treten nur in der Jugend auf; andere günstige oder schädliche Einflüsse verschwinden später. Ein mit Kiefern untermischter Fichtenbestand kann in jugendlichem Alter geringen Zuwachs besitzen, wenn er durch Ueberschirmung der vorgewachsnen Kiefern leidet; nach erfolgtem Aushieb der letztern steigt dann der Zuwachs plötzlich und das Manko gleicht sich, wenn der Boden gut ist, in spätern Jahren wieder aus. Wollte man den Haubarkeitsertrag dieses Fichtenbestandes nach derjenigen Curve veranschlagen, welche für das nämliche Alter denselben Durchschnittszuwachs besitzt, so würde man hier vielleicht einen viel

zu niedern Ansatz erhalten. Oder nehmen wir an, die Fichten wüchsen auf einem angeschwemmten sehr fruchtbaren, aber etwas tief gelegnen, den Frösten exponirten Boden, so würde unter Umständen der Zuwachs dieses Bestandes in der Jugend und zwar so lange ganz unbedeutend sein, bis die Fichten die Region des Frostes überwachsen hätten. Litten sie, wie dies häufig der Fall ist, nachdem sie eine gewisse Höhe erreicht hätten, nicht mehr von Frösten, so würde auch der volle Zuwachs wieder eintreten, der dem fruchtbaren Boden entspricht.

Die Aufnahme des Durchschnittszuwachses ganz junger Bestände leistet also deßhalb für die Bonitirung nichts, weil sehr viele Curven sich denken lassen, welche bis zu einem gewissen Alter hin zusammenfallen, später aber merklich auseinandergehen (Fig. 10).

Für Holzungen jüngern Alters und für Blößen bleibt uns daher nichts übrig, als auf die Zuwachsgleichung zurückzugehen. Man ermittelt die Coefficienten b, l, k und drückt durch diese und das variable Alter x den Durchschnittszuwachs aus.

Allein, um der Function eine solche Gestalt geben zu können, daß für jeden Werth von x ein y hervorgebracht wird, welches Boden, Lagen und Klima genau entspricht, muß man wissen, welche die Momente sind, von denen der Zuwachs abhängt. Man muß im Stande sein, diesen Momenten eine numerische Bedeutung zu geben.

So lange wir über den quantitativen Einfluß der Factoren der Bodengüte noch nicht im Klaren sind, wie dies leider bis heutzutage der Fall ist, so lange werden wir auch nicht im Stande sein, die Größe des Durchschnittszuwachses durch die Untersuchung des Bodens u. s. w. direct zu bestimmen. Man ist auch hier wieder darauf angewiesen, eine Zuwachscurve zu Hülfe zu nehmen. Diejenige Ertragstafel — denn, müssen wir jetzt bemerken, die Curven sollen nur ein graphisches Bild für

die Ertragstafeln sein — welche Boden, Lage und Klima mit der zu bonitirenden Blöße gemein hat, gibt den wahrscheinlichen Wachsthumsgang eines auf letzterer zu erziehenden Bestandes an.

Es ist kaum nöthig, zu bemerken, daß die Zuwachsbestimmung dann am einfachsten sich gestaltet, wenn dicht neben dem ajährigen zu bonitirenden Bestande ein anderer ujähriger sich befindet, der hinsichtlich seiner Standortsverhältnisse u. s. w. genau mit jenem übereinstimmt.

§. 30.

Die Resultate, welche sich aus den vorhergehenden Betrachtungen ergeben, sind folgende:

1. Die Vorausbestimmung des künftigen Ertrags eines Bestandes unter Zugrundlegung des Stärke- oder Massezuwachses ist als fehlerhaft zu verwerfen.
2. Die Annahme, beim Holz erfolge Zuwachs vom Zuwachs, oder die Holzkapitalien vermehrten sich wie Geldkapitalien, ist eine unbegründete.
3. Der Abtriebsertrag eines Waldes wird viel richtiger nach Erfahrungstafeln gefunden. Um die dem zu bonitirenden Bestande entsprechende Ertragstafel auswählen zu können, hat man für Bestände, welche im Mannbarkeitsalter oder nicht ferne von demselben stehen, blos den Durchschnittszuwachs, für Bestände mittlern Alters diesen, sowie die Einflüsse von Boden, Lage und Klima, für ganz junge Bestände oder Blößen nur diese Einflüsse zu untersuchen.

Anhang.

Ertragsuntersuchungen.

I. Katzenberg-Buchen.

Klasse.	Eines Stamms		Aller Stämme							Richthöhe = $\frac{i}{g}$
	Kreisfläche g.	Inhalt i.	Zahl.	Kreisflächensumme.	Scheidholz a.	Prügelholz b.	Stockholz c.	Reisholz d.	Summe a+b+c+d.	
I.	0.2166	7.9082	4	0.8664	4.2800	19.4180	4.5800	3.3548	31.6328	36.51
II.	0.4137	16.7466	25	10.3425	268.3750	37.3875	40.3225	72.5800	418.6650	40.48
III.	0.6150	26.4332	30	18.4500	455.0400	74.7300	69.6780	193.5480	792.9960	42.98
IV.	0.8405	37.9499	38	31.9390	919.9800	123.7280	190.0000	208.3882	1442.0962	45.15
V.	1.1191	53.4734	23	25.7393	845.6180	26.6570	153.5802	204.0330	1229.8882	47.78
VI.	1.4374	67.2466	8	11.4992	337.3240	30.0680	72.2584	98.3224	537.9728	46.78
VII.	1.6838	80.8844	5	8.4190	266.7625	20.5625	51.9355	65.1615	404.4220	48.04
		Summe	133	107.2554	3097.3795	332.5510	582.3546	845.3879	4857.6730	
	Mittl. Modellstamm									
	0.8064	36.2086	Holzgehalt der Probefläche, berechnet aus dem mittlern Modellstamm =						4815.7438	
								minus	41.9292	

II. Antrefferkopf-Buchen.

Klasse.	Eines Stamms: Kreisfläche g.	Eines Stamms: Inhalt i.	Aller Stämme: Zahl.	Aller Stämme: Kreisflächen-summe.	Aller Stämme: Scheidholz a.	Aller Stämme: Prügelholz b.	Aller Stämme: Stockholz c.	Aller Stämme: Reisholz d.	Aller Stämme: Summe a+b+c+d.	Richthöhe = $\frac{g}{i}$
I.	0.1345	3.9375	41	5.5145		78.3715	45.7191	37.3428	161.4334	29.27
II.	0.2521	8.1363	93	23.4453	159.9786	361.3515	98.9334	136.4124	756.6759	32.27
III.	0.3922	14.7421	79	30.9838	544.4285	152.0750	211.4356	256.6868	1164.6259	37.59
IV.	0.6106	23.8320	56	34.1936	570.6400	182.7560	215.5216	365.6744	1334.5920	39.03
V.	0.8149	32.1924	11	8.9639	227.9365	11.4950	49.4483	65.2366	354.1164	39.50
VI.	1.1310	41.8617	5	5.6550	116.9800	22.9675	35.2915	34.0695	209.3085	37.01
VII.	1.5266	71.0041	11	16.7926	443.4210	68.0020	132.5555	137.0666	781.0451	46.51
		Summe	296	125.5487	2063.3846	877.0185	788.9050	1032.4891	4761.7972	
	Mittl. Modellstamm									
	0.4245	16.0864	Holzgehalt der Probefläche, berechnet aus dem mittlern Modellstamm =						4761.5744	
								minus	0.2228	

III. Langenbruch-Kiefern.

Klasse.	Eines Stamms		Aller Stämme							Richthöhe = $\frac{s}{i}$
	Kreisfläche g.	Inhalt i.	Zahl.	Kreisflächen-summe.	Scheidholz a.	Prügelholz b.	Stockholz c.	Reisholz d.	Summe a+b+c+d.	
I.	0.2813	9.0770	8	2.2504	18.6920	43.2240	6.5712	4.1288	72.6160	32.27
II.	0.4065	16.2992	62	25.2030	497.6120	333.7460	121.7866	57.4058	1010.5504	40.10
III.	0.6106	21.4034	95	58.0070	1241.1750	448.1150	217.1415	126.8915	2033.3230	35.05
IV.	0.8149	32.5067	77	62.7473	1878.5690	168.3605	266.7511	189.3353	2503.0159	39.89
V.	1.1250	45.7747	36	40.5000	1231.3800	67.8240	182.5704	166.1148	1647.8892	40.69
VI.	1.3377	64.4671	11	14.7147	547.6900	10.9835	77.0000	73.4646	709.1381	48.19
		Summe	289	203.4224	5415.1180	1072.2530	871.8208	617.3408	7976.5326	
	Mittl. Modellstamm									
	0.7039	22.1105	Holzgehalt der Probefläche, berechnet aus dem mittl. Modellstamm =						7650.9860	
								minus	325.5466	

IV. Kahlerberg-Buchen.

Klasse.	Eines Stamms		Aller Stämme							Richthöhe $= \frac{g}{i}$
	Kreisfläche g.	Inhalt i.	Zahl.	Kreisflächen-summe.	Scheidholz a.	Prügelholz b.	Stockholz c.	Reisholz d.	Summe a+b+c+d.	
I.	0,2354	6,8455	97	22,8338	120,9105	370,2975	82,5955	90,2100	664,0135	29,08
II.	0,3957	13,6143	96	37,9872	697,4880	258,4800	168,0000	183,0048	1306,9728	34,40
III.	0,5931	24,0857	40	23,7240	546,4200	63,2600	137,5000	216,2480	963,4280	40,61
IV.	0,8405	32,3002	7	5,8835	124,5335	14,7245	35,9842	50,8592	226,1014	38,43
V.	1,0777	40,5147	2	2,1554	43,8410	5,2510	13,6874	18,2500	81,0294	37,59
VI.	1,4306	48,8237	1	1,4306	28,4005	2,5170	7,6875	10,2187	48,8237	34,13
		Summe	243	94,0145	1561,5935	714,5300	445,4546	568,7907	3290,3688	
	Mittl. Modellstamm									
	0,3869	13,2427	Holzgehalt der Probefläche, berechnet aus dem mittl. Modellstamm =						3218,0000	
								minus	72,3688	

V. Hundsieg-Kiefern.

Klasse.	Eines Stamms		Aller Stämme							Richthöhe $= \frac{s}{g}$
	Kreisfläche g.	Inhalt i.	Zahl.	Kreisflächensumme.	Scheidholz a.	Prügelholz b.	Stockholz c.	Reisholz d.	Summe a+b+c+d.	
I.	0,5801	22,1519	8	4,6408	111,2240	38,7560	20,0712	7,1640	177,2152	38,19
II.	0,8614	40,3853	44	37,9016	1340,6180	95,4360	177,5708	163,2884	1776,9532	46,88
III.	1,1370	56,4079	57	64,8090	2543,2830	115,5105	251,9172	304,5396	3215,2503	49,61
IV.	1,4171	69,7343	37	52,4327	2172,4180	56,0254	199,5336	152,1921	2580,1691	49,21
V.	1,7729	85,9633	14	24,8206	992,9430	17,4440	119,9996	73,0996	1203,4862	48,49
		Summe	160	184,6047	7160,5260	323,1719	769,0924	700,2837	8953,0740	
	Mittl. Modellstamm									
	1,1538	57,2072	Holzgehalt der Probefläche, berechnet aus dem mittl. Modellstamm =						9153,1520	
								plus	200,0780	

VI. Langenbruch-Fichten.

Klasse.	Eines Stamms		Aller Stämme							Richthöhe = $\frac{g}{i}$
	Kreisfläche g.	Inhalt i.	Zahl.	Kreisflächen-summe.	Scheidholz a.	Prügelholz b.	Stockholz c.	Reisholz d.	Summe a+b+c+d.	
I.	0,1304	3,5145	35	4,5640		123,0075			123,0075	26,95
II.	0,2409	11,9431	252	60,6068	807,0300	1247,1480	409,5000	545,9832	3009,6612	49,58
III.	0,4065	17,0728	142	57,7230	1499,8750	415,6340	267,4286	241,4000	2424,3376	42,00
IV.	0,5844	33,0614	61	35,6484	1304,3020	126,8495	239,9313	345,6626	2016,7454	56,57
V.	0,8509	45,7940	35	29,7815	943,5125	64,2775	266,0000	329,0000	1602,7900	53,82
		Summe	525	188,3237	4554,7195	1976,9165	1182,8599	1462,0458	9176,5417	
	Mittl. Modellstamm									
	0,3587	15,5921	Holzgehalt der Probefläche, berechnet aus dem mittl. Modellstamm =						8185,8525	
								minus	990,6892	

VII. Neuesgeheeg-Buchen.

Klasse.	Eines Stamms		Aller Stämme							Richthöhe $= \frac{i}{g}$
	Kreisfläche g.	Inhalt i.	Zahl.	Kreisflächensumme.	Scheidholz a.	Prügelholz b.	Stockholz c.	Reisholz d.	Summe a+b+c+d.	
I.	0,2300	8,7010	79	18,1700	87,1370	444,5725	77,2541	78,4154	687,3790	37,83
II.	0,3957	18,0630	94	37,1958	1028,6138	279,7628	191,8728	197,6726	1697,9220	45,65
III.	0,5931	27,1822	54	32,0274	1036,0980	113,6970	182,2500	135,7938	1467,8388	45,83
IV.	0,8457	38,6101	16	13,5312	409,9200	28,3120	70,3536	109,1760	617,7616	45,65
V.	1,1071	53,2644	11	12,1781	420,0295	17,8640	68,4266	79,5883	585,9084	48,11
VI.	1,4037	80,9266	2	2,8074	104,3680	12,1250	23,1578	22,2024	161,8532	57,65
		Summe	256	115,9099	3086,1663	896,3333	613,3149	622,8485	5218,6630	
	Mittl. Modellstamm									
	0,4528	20,6962	Holzgehalt der Probefläche, berechnet aus dem mittl. Modellstamm =						5298,2220	
								plus	79,5590	

VIII. Stamm-Buchen.

Klasse.	Eines Stamms		Aller Stämme							$\frac{g}{i}$ = Richthöhe
	Kreisfläche g.	Inhalt i.	Zahl.	Kreisflächen-summe.	Scheidholz a.	Prügelholz b.	Stockholz c.	Reisholz d.	Summe a+b+c+d.	
I.	0,1184	3,8197	55	6,5120		143,6160	27,5440	38,9235	210,0835	32,26
II.	0,2465	8,6953	197	48,5605	452,4105	764,7934	257,6760	238,0942	1712,9741	35,27
III.	0,3993	15,1739	98	39,1314	826,1890	187,0820	270,9602	202,8110	1487,0422	38,03
IV.	0,5931	25,2934	26	15,4206	335,2570	148,0180	89,1228	85,2306	657,6284	42,65
V.	0,8405	37,7929	10	8,4050	213,8650	40,7200	56,4570	66,8870	377,9290	44,96
		Summe	386	118,0295	1827,7215	1284,2294	701,7600	631,9463	4445,6572	
	Mittl. Modellstamm									
	0,3058	11,2096	Holzgehalt der Probefläche, berechnet aus dem mittl. Modellstamm =						4336,9056	
								minus	108,7516	

IX. Ammenhäuserhecke-Buchen.

Klasse.	Eines Stamms: Kreisfläche g.	Eines Stamms: Inhalt i.	Aller Stämme: Zahl.	Kreisflächensumme.	Scheidholz a.	Prügelholz b.	Stockholz c.	Reisholz d.	Summe a+b+c+d	Richthöhe $= \frac{i}{g}$
I.	0.4101	14.1285	9	3.6909	63.1368	28.9998	17.5113	17.5086	127.1565	34.45
II.	0.6373	27.6990	32	20.3936	583.9616	89.7216	104.0800	108.6048	886.3680	43.46
III.	0.8354	51.9054	43	35.9222	1580.7660	155.3676	173.9522	321.8464	2231.9322	62.13
IV.	1.0894	61.0524	39	42.4866	1440.5040	250.3605	322.6353	367.5438	2381.0436	56.04
V.	1.4509	82.2823	19	27.5671	1062.4458	108.5413	224.2570	168.1196	1563.3637	56.71
VI.	1.9029	91.7529	5	9.5145	298.5425	65.2225	48.1815	46.8180	458.7645	48.22
VII.	2.1934	141.1051	3	6.5802	303.3810	17.1165	43.8180	58.9998	423.3153	64.33
		Summe	150	146.1551	5332.7377	715.3298	934.4353	1089.4410	8071.9438	
	Mittl. Modellstamm									
	0.9737	56.8858	Holzgehalt der Probefläche, berechnet aus dem mittl. Modellstamm =						8532.8700	
								plus	460.9262	

X. Viehberg-Kiefern.

Klasse.	Eines Stamms: Kreisfläche g.	Eines Stamms: Inhalt i.	Aller Stämme: Zahl.	Aller Stämme: Kreisflächen-summe.	Aller Stämme: Scheidholz a.	Aller Stämme: Prügelholz b.	Aller Stämme: Stockholz c.	Aller Stämme: Reisholz d.	Aller Stämme: Summe a+b+c+d.	Richthöhe $= \frac{s}{g}$
I.	0.1243	2.7100	289	35.9227		509.9405	92.8268	180.4227	783.1900	21.80
II.	0.2437	6.7348	269	65.5553	324.0105	902.3605	204.9780	380.3122	1811.6612	27.64
III.	0.4029	14.2116	116	46.7364	827.0220	269.8740	202.3388	349.3108	1648.5456	35.28
IV.	0.6018	16.9188	17	10.2306	152.9745	38.5050	32.4615	63.6786	287.6196	28.11
		Summe	691	158.4450	1304.0070	1720.6800	532.6051	973.7243	4531.0164	
	Mittl. Modellstamm									
	0.2292	6.2460	Holzgehalt der Probefläche, berechnet aus dem mittl. Modellstamm =						4315.9860	
								minus	215.0304	

XI. Lemberg-Buchen.

Klasse.	Eines Stamms		Aller Stämme							Richthöhe $= \frac{i}{g}$
	Kreisfläche g.	Inhalt i.	Zahl.	Kreisflächensumme.	Scheidholz a.	Prügelholz b.	Stockholz c.	Reisholz d.	Summe a+b+c+d.	
I.	0,1472	4,4243	23	3,3856		74,5315	14,0967	13,1307	101,7589	30,05
II.	0,2521	8,7783	122	30,7562	261,5070	479,8504	178,0834	151,5118	1070,9526	34,82
III.	0,4065	15,7310	93	37,8045	830,1831	206,8041	239,9958	186,0000	1462,9830	38,70
IV.	0,6106	27,2532	39	23,8134	571,8570	75,8550	183,6780	231,4845	1062,8745	44,63
V.	0,8251	32,0849	2	1,6502	39,3370	5,7360	9,0322	10,0646	64,1698	38,89
VI.	1,0953	38,7709	3	3,2859	65,4930	6,5940	21,1935	23,0322	116,3127	35,40
		Summe	282	100,6958	1768,3771	849,3710	646,0796	615,2238	3879,0515	
	Mittl. Modellstamm									
	0,3571	13,5067	Holzgehalt der Probefläche, berechnet aus dem mittl. Modellstamm =						3808,6920	
								minus	70,3595	

XII. Fräuleinshang-Lärchen.

Klasse.	Eines Stamms		Aller Stämme							$\frac{g}{i}$ = Richthöhe
	Kreisfläche g.	Inhalt i.	Zahl.	Kreisflächen-summe.	Scheidholz a.	Prügelholz b.	Stockholz c.	Reisholz d.	Summe a+b+c+d.	
I.	0,0497	1,2605	147	7,3059		96,8730	32,6634	55,7571	185,2935	25,36
II.	0,1243	3,3883	540	67,1220		1369,7100	189,9720	270,0000	1829,6820	27,26
III.	0,2409	8,8282	213	51,2117	479,1435	977,9895	173,5524	249,7212	1880,4066	36,65
IV.	0,3993	12,9886	40	15,9720	287,8400	110,0200	44,4440	77,2400	519,5440	32,53
		Summe	940	141,6116	766,9835	2554,5925	440,6318	652,7183	4414,9261	
	Mittl. Modellstamm									
	0,1507	4,6233	Holzgehalt der Probefläche, berechnet aus dem mittl. Modellstamm =						4344,9620	
								minus	69,9641	

XIII. Hainstruth-Kiefern.

Klasse.	Eines Stamms		Aller Stämme							
	Kreisfläche g.	Inhalt i.	Zahl.	Kreisflächen-summe.	Scheidholz a.	Prügelholz b.	Stockholz c.	Reisholz d.	Summe a+b+c+d.	Richthöhe = $\frac{i}{g}$
I.	0,1387	3,6916	77	10,6799		207,9770	37,1217	39,1545	284,2532	26,62
II.	0,2300	5,7425	162	37,2600	181,9260	503,4960	118,6002	126,2628	930,2850	24,97
III.	0,3993	10,7521	158	63,0594	742,1260	571,1700	262,3906	123,1452	1698,8318	26,93
IV.	0,5801	16,5039	35	20,3035	353,7275	76,5975	82,4985	64,8130	577,6365	28,45
V.	0,7946	32,7617	8	6,3568	164,5080	6,0000	37,4288	54,1568	262,0936	41,23
		Summe	440	137,6596	1442,2875	1365,2405	538,0398	407,5323	3753,1001	
	Mittl. Modellstamm									
	0,3129	8,1956	Holzgehalt der Probefläche, berechnet aus dem mittl. Modellstamm =						3606,0640	
								minus	147,0361	

XIV. Eichwald-Buchen.

Klasse.	Eines Stamms		Aller Stämme							Richthöhe $= \frac{i}{g}$
	Kreisfläche g.	Inhalt i.	Zahl.	Kreisflächen-summe.	Scheidholz a.	Prügelholz b.	Stockholz c.	Reisholz d.	Summe a+b+c+d	
I.	0,2521	8,5208	26	6,5546	27,4820	144,5340	34,0470	15,4778	221,5408	33,80
II.	0,4173	18,3035	45	18,7785	439,7625	232,5600	100,4445	50,8905	823,6575	43,86
III.	0,5801	31,7057	67	38,8667	1465,9265	134,9380	264,1944	259,2230	2124,2819	54,66
IV.	0,8405	47,7894	46	38,6630	1494,0570	94,3460	299,8188	310,0906	2198,3124	56,86
V.	1,0894	62,3595	15	16,3410	664,8900	53,9850	129,9105	86,6070	935,3925	57,24
VI.	1,5058	101,2255	3	4,5174	181,2360	54,4050	33,3927	34,6428	303,6765	67,22
VII.	1,6838	88,6930	14	23,5732	760,9630	104,4890	173,7498	202,5002	1241,7020	52,67
		Summe	216	147,2944	5034,3170	819,2570	1035,5577	959,4319	7848,5636	
	Mittl. Modellstamm									
	0,6819	37,9874	Holzgehalt der Probefläche, berechnet aus dem mittl. Modellstamm =						8205,7148	
								plus	356,2784	

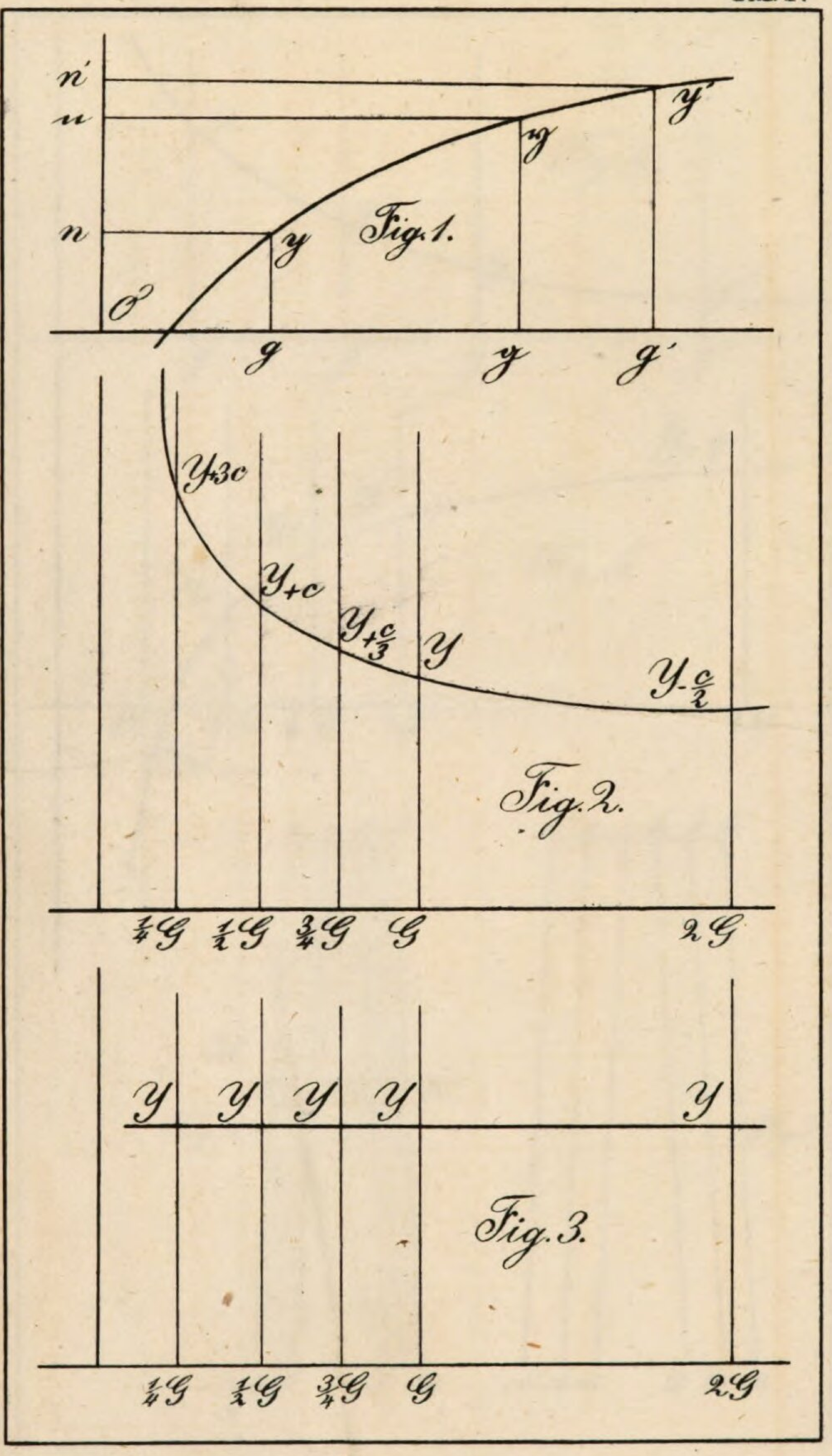
XV. Steinberg-Kiefern.

Klasse.	Eines Stamms		Aller Stämme							Richthöhe $= \frac{i}{g}$
	Kreisfläche g.	Inhalt i.	Zahl.	Kreisflächen-summe.	Scheidholz a.	Prügelholz b.	Stockholz c.	Reisholz d.	Summe a+b+c+d.	
I.	0,2607	6,7203	107	27,8949	128,8815	390,7640	122,2796	77,1470	719,0721	25,78
II.	0,4660	15,3512	110	51,2600	1010,3500	292,4900	212,1460	173,6460	1688,6320	32,94
III.	0,6150	21,9626	107	65,8050	1556,4220	271,1915	288,5148	233,8699	2349,9982	35,80
IV.	0,9561	27,4467	20	19,1220	354,6900	29,9600	87,8560	76,4280	548,9340	28,71
V.	1,1918	41,2383	14	16,6852	397,3690	24,6680	74,9994	80,2998	577,3362	34,60
VI.	1,3705	48,9324	3	4,1115	102,4845	4,8630	18,3213	21,1284	146,7972	35,70
		Summe	361	184,8786	3550,1970	1013,9365	804,1171	662,5191	6030,7697	
	Mittl. Modellstamm									
	0,5121	15,4529	Holzgehalt der Probefläche, berechnet aus dem mittl. Modellstamm =						6280,2087	
								plus	249,4390	

XVI. Kirchgeheeg-Buchen.

Klasse.	Eines Stamms		Aller Stämme							Richthöhe = $\frac{i}{g}$
	Kreisfläche g.	Inhalt i.	Zahl.	Kreisflächen-summe.	Scheidholz a.	Prügelholz b.	Stockholz c.	Reisholz d.	Summe a+b+c+d.	
I.	0,2665	8,4359	3	0,7995	6,4680	13,1310	3,3201	2,3886	25,3077	31,65
II.	0,3852	15,7274	66	25,4232	555,2382	226,9740	99,3102	156,4860	1038,0084	40,83
III.	0,5974	26,0152	73	43,6102	1277,6971	123,7861	238,2939	259,3225	1899,1096	43,55
IV.	0,8302	35,7691	37	30,7174	876,1674	71,5469	157,7495	217,9929	1323,4567	43,08
V.	1,0894	52,2530	5	5,4460	170,9700	14,2600	26,9905	49,0445	261,2650	47,98
VI.	1,4714	75,8962	1	1,4714	48,9100	5,6435	11,8471	10,0956	76,4962	51,58
		Summe	185	107,4677	2935,4507	455,3415	537,5113	695,3401	4623,6436	
	Mittl. Modellstamm									
	0,5809	25,2909	Holzgehalt der Probefläche, berechnet aus dem mittl. Modellstamm =						4664,8490	
								plus	41,2054	

Taf. I.



n'
u
n
y'
y
y
O
g
y
g'
Fig. 1.
Y+3c
Y+c
Y+c/3
Y
Y-c/2
Fig. 2.
1/4G 1/2G 3/4G G 2G
Y Y Y Y Y
Fig. 3.
1/4G 1/2G 3/4G G 2G

Taf. II.

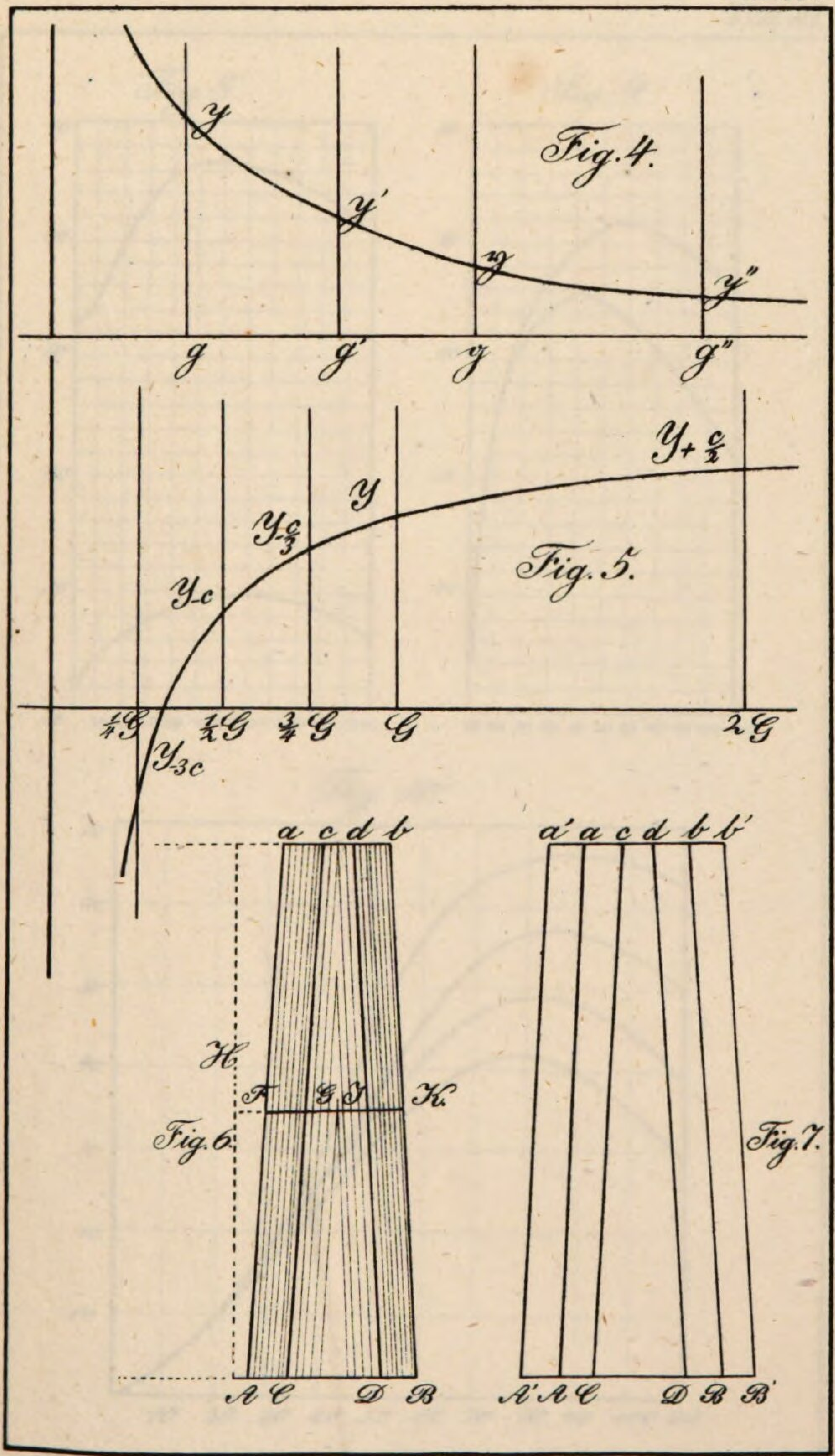

y
y'
η
y''
g
g'
γ
g''
Fig. 4.
Y + c/2
Y
Y - c/3
Y - c
Fig. 5.
1/4 G
1/2 G
3/4 G
G
2 G
Y - 3c
a c d b
H
F G J K.
Fig. 6.
A C D B
a' a c d b b'
Fig. 7.
A' A C D B B'

Fig. 8.

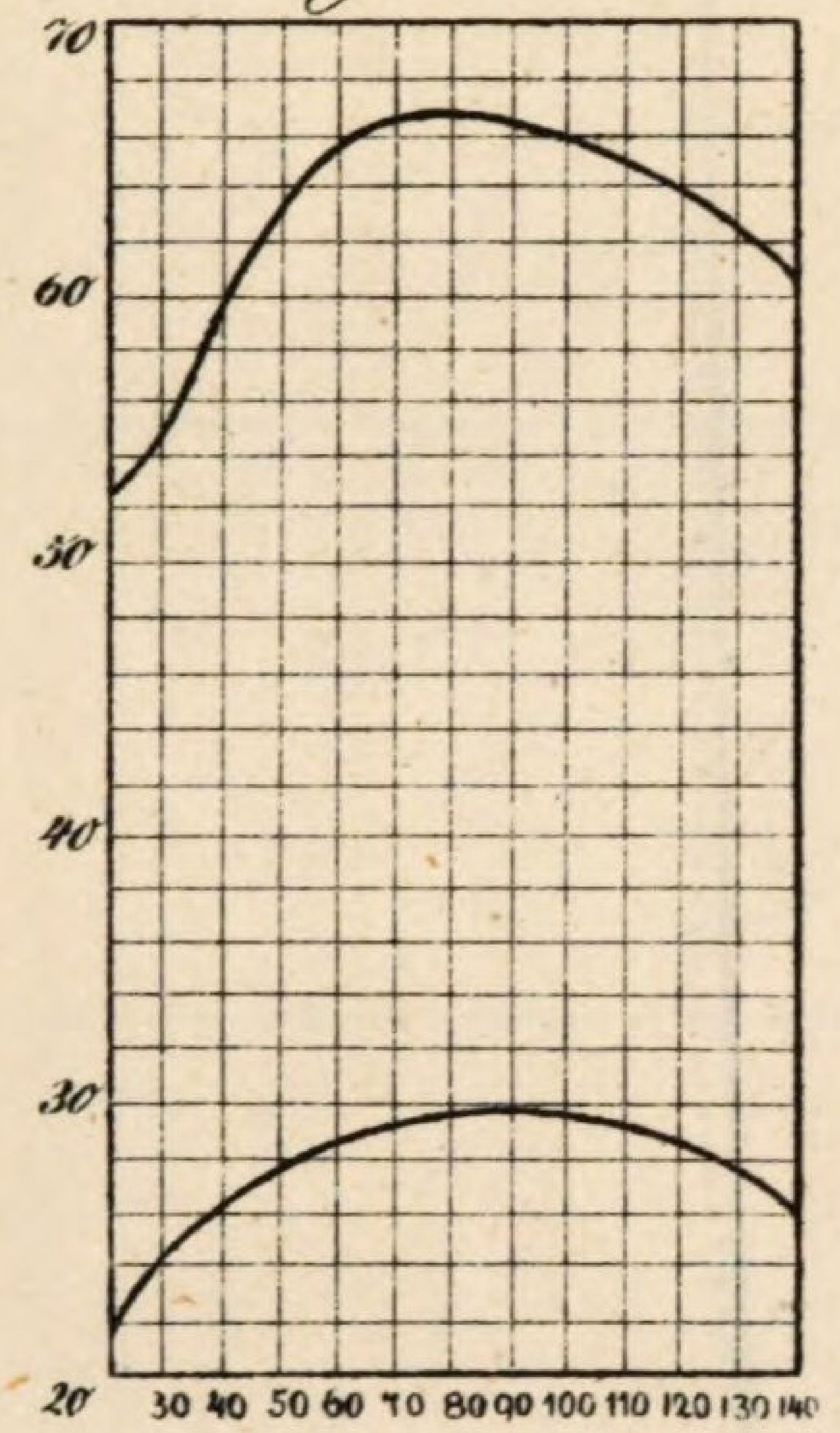


Fig. 9.

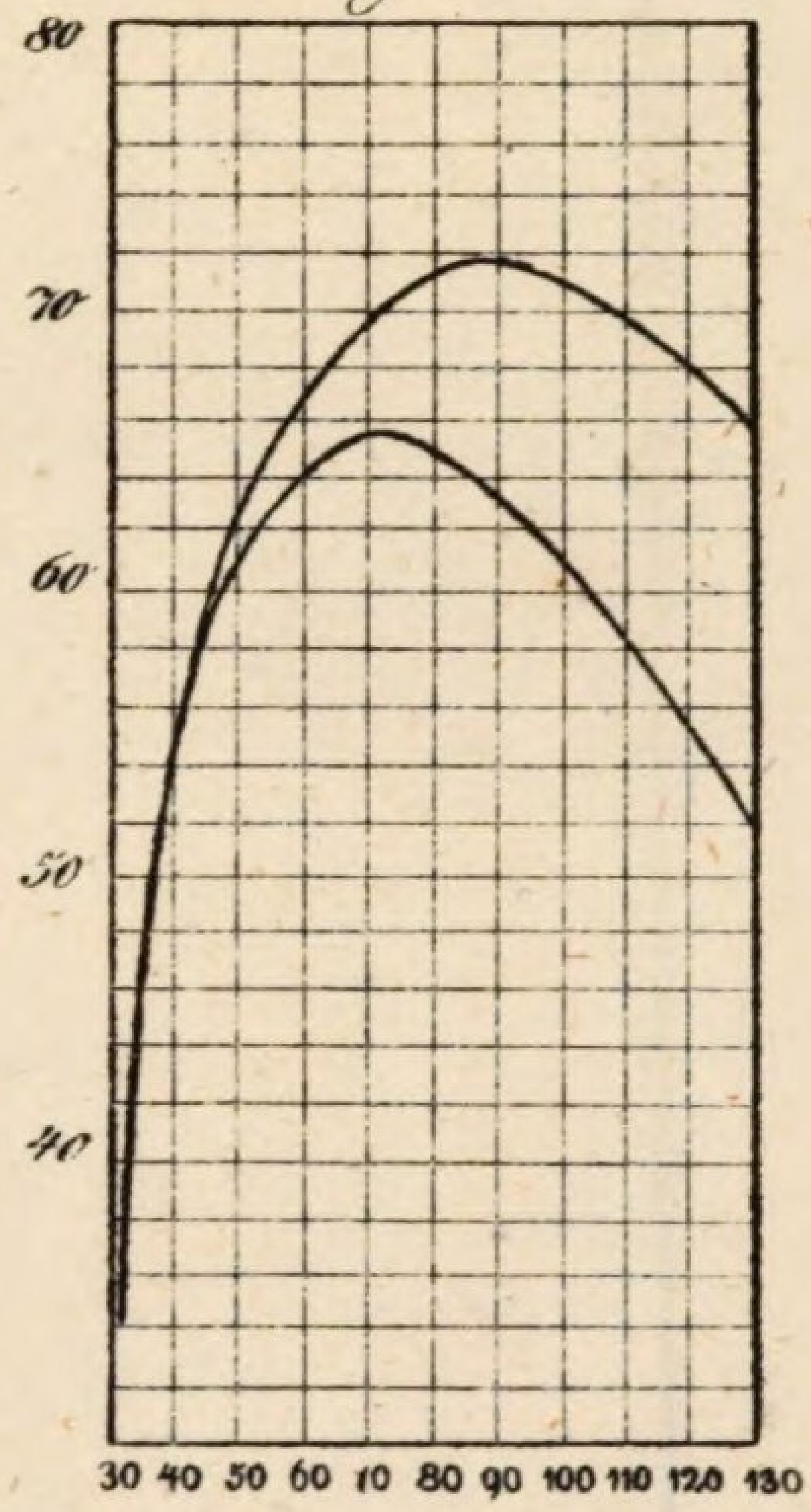
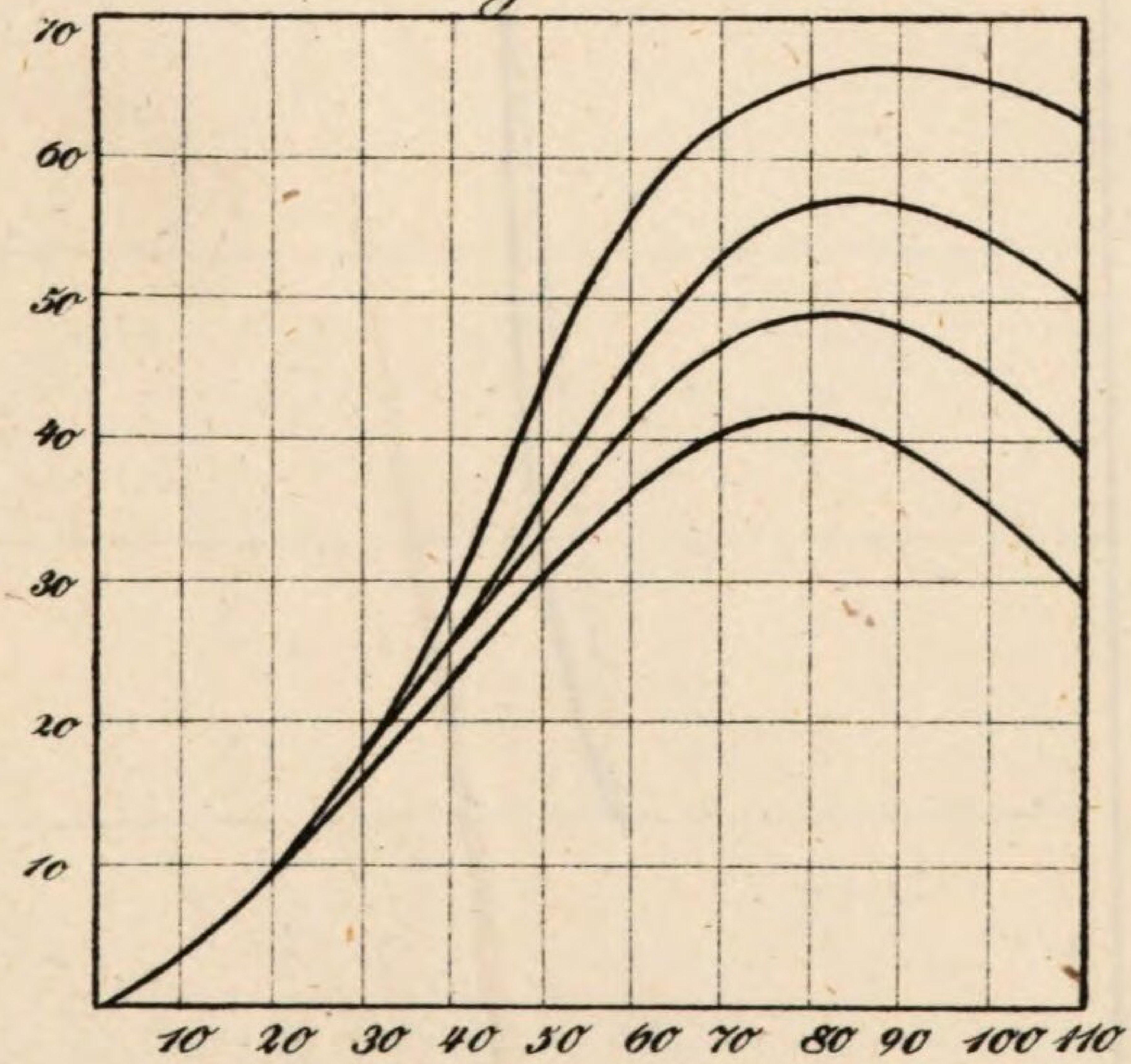
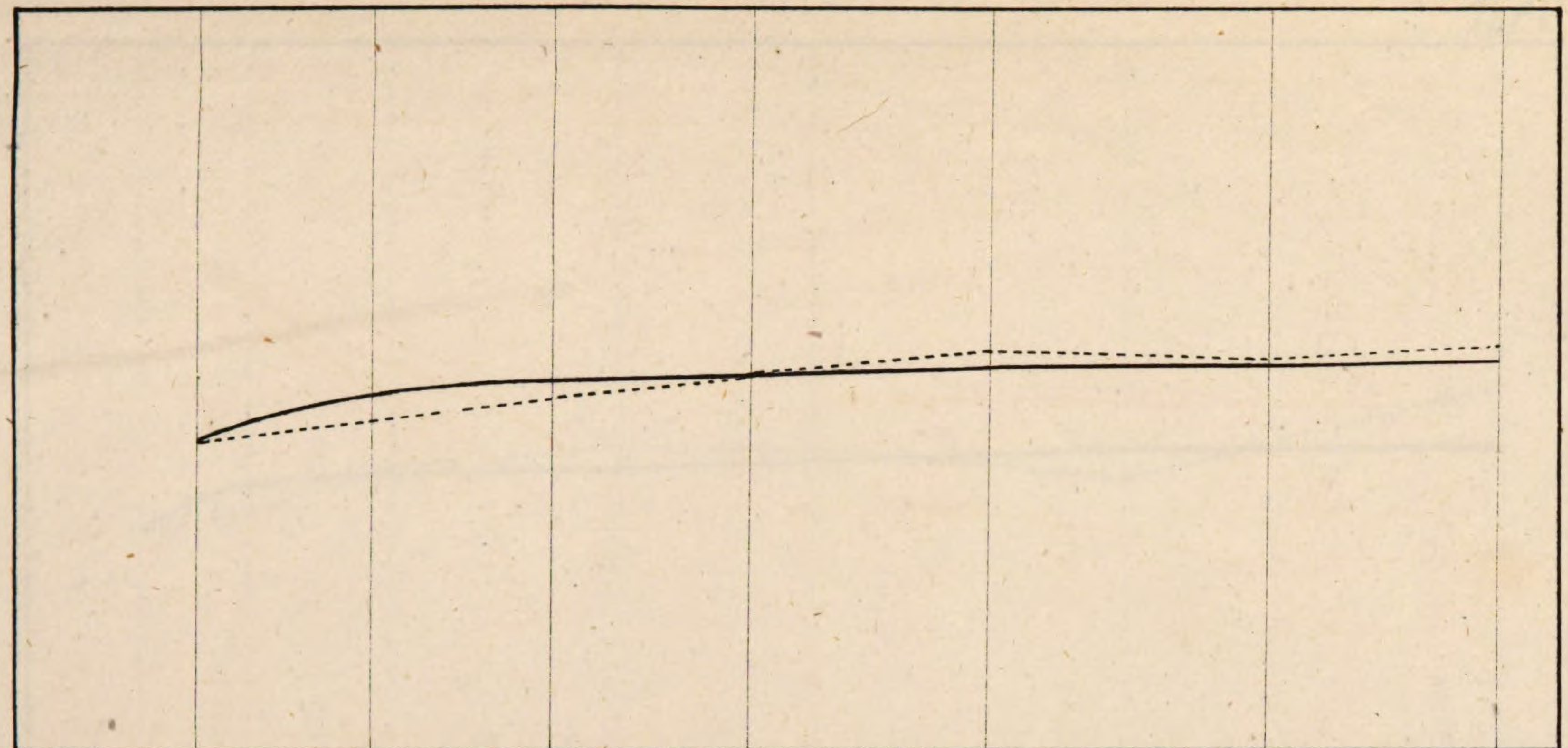


Fig. 10.

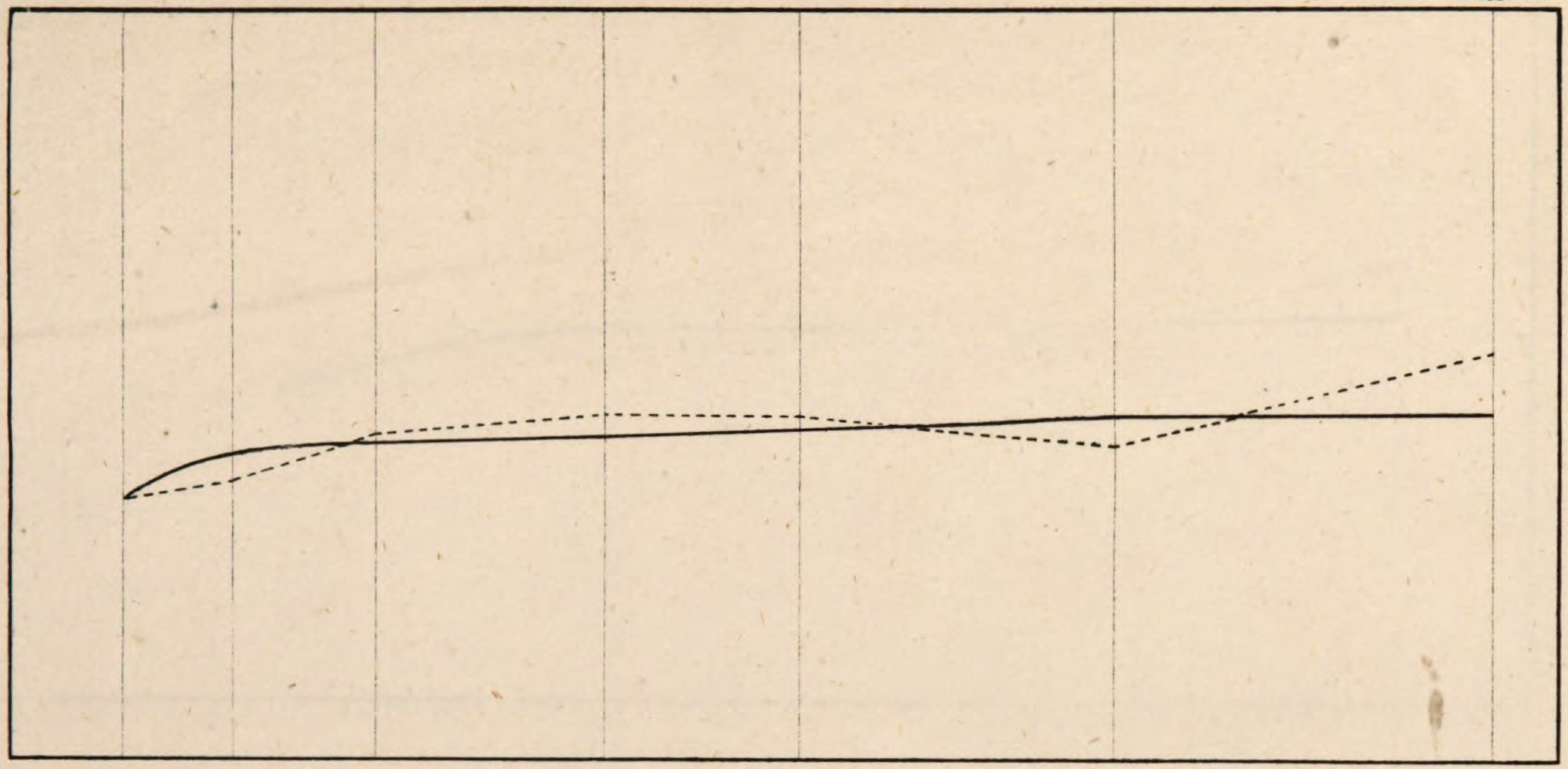


Taf. IV.

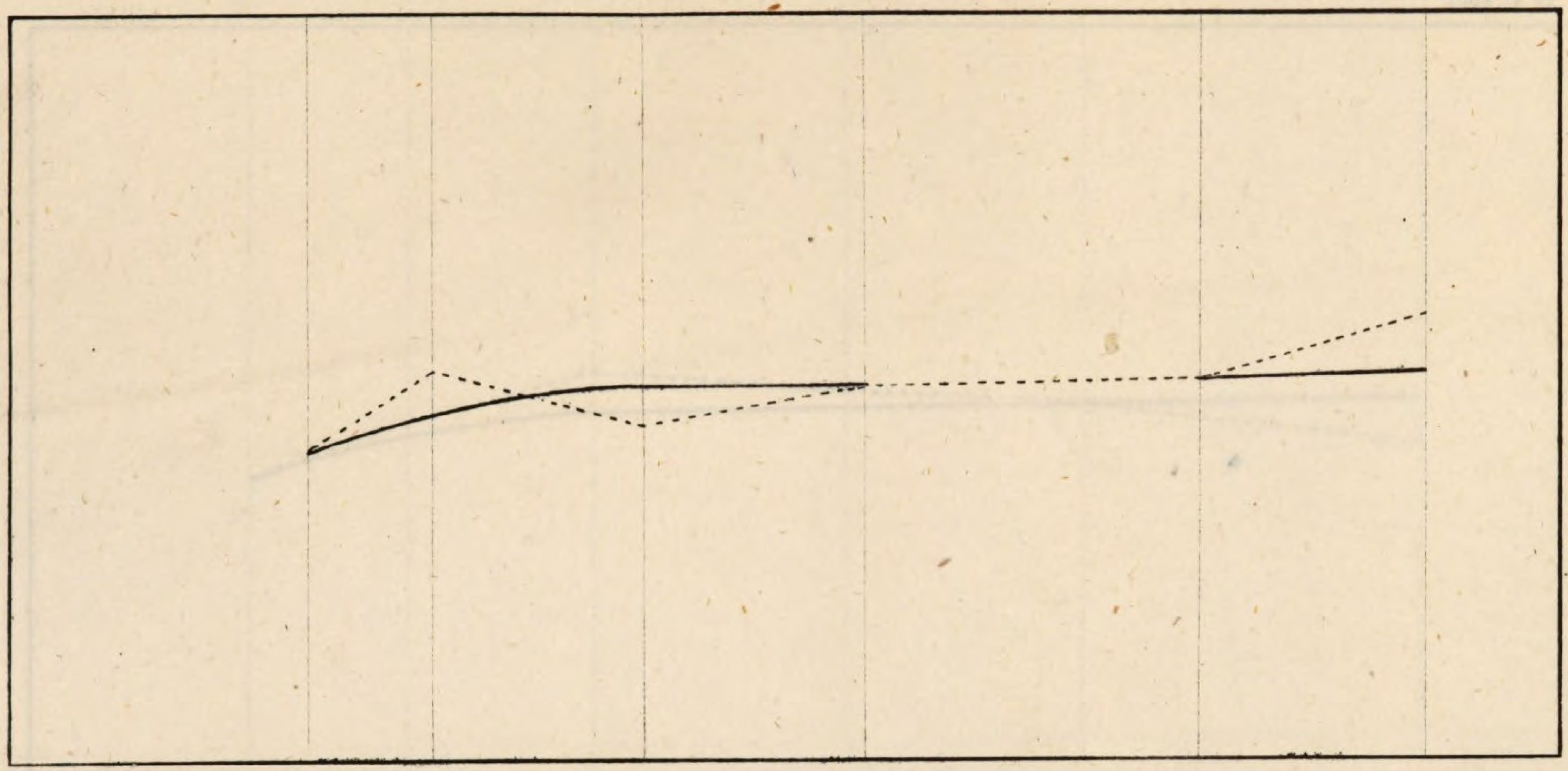
I. Katzenberg. Buchen.



II. Antrefferkopf. Buchen.

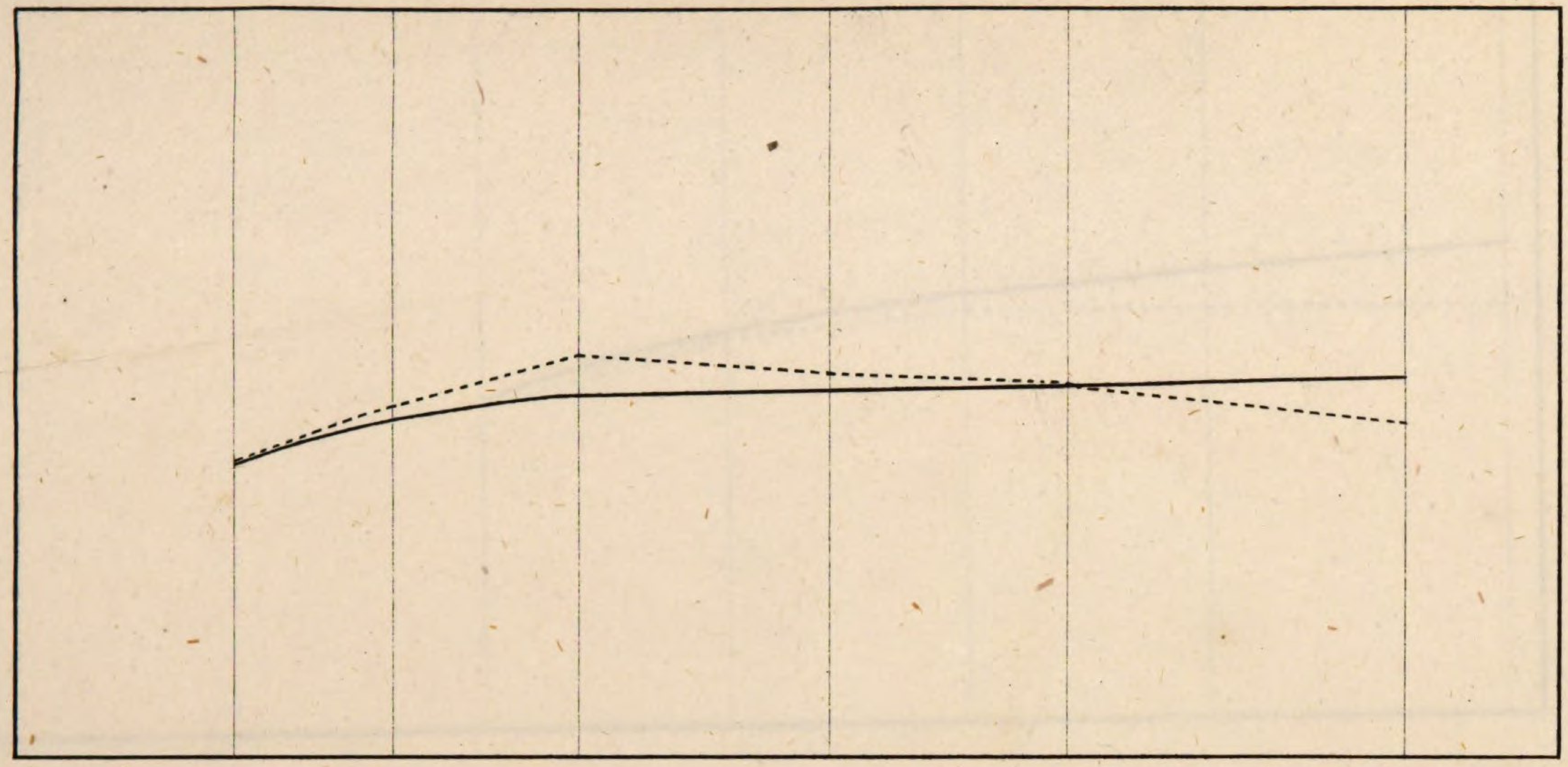


III. Langenbruch. Kiefern.



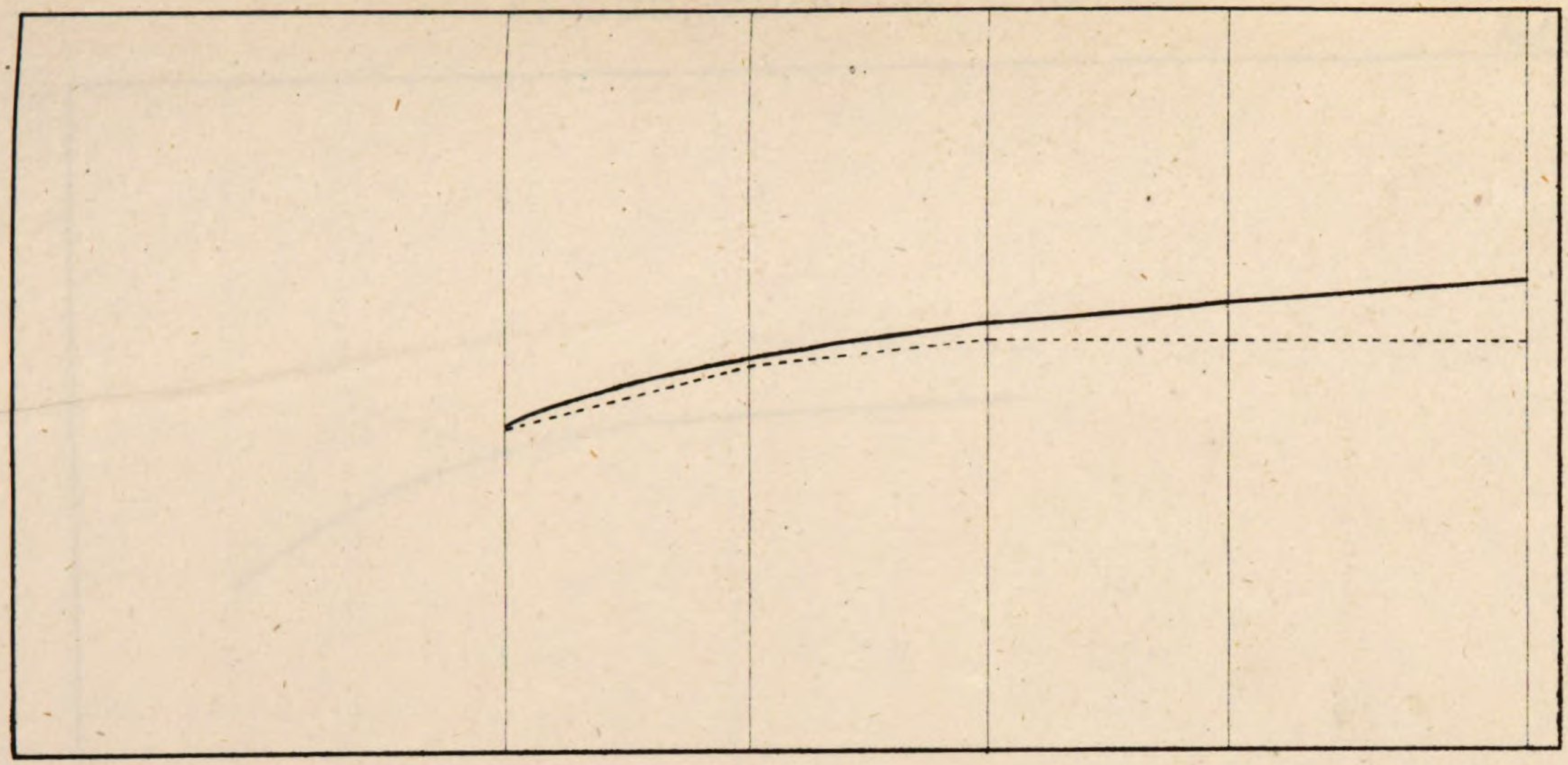
Taf. VII.

IV. Kahlenberg Buchen.



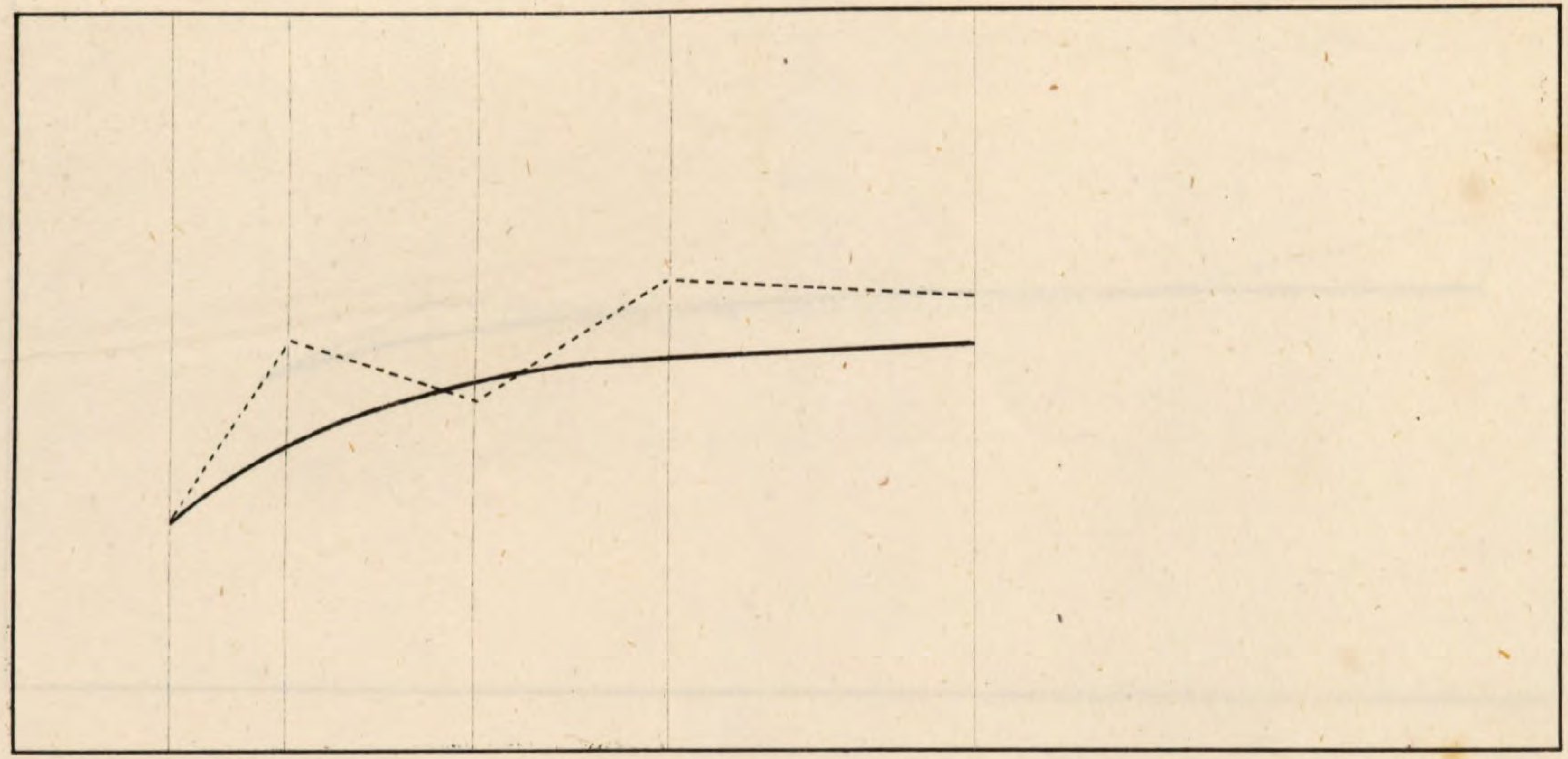
Taf. VIII.

V. Hundsieg. Kiefern.



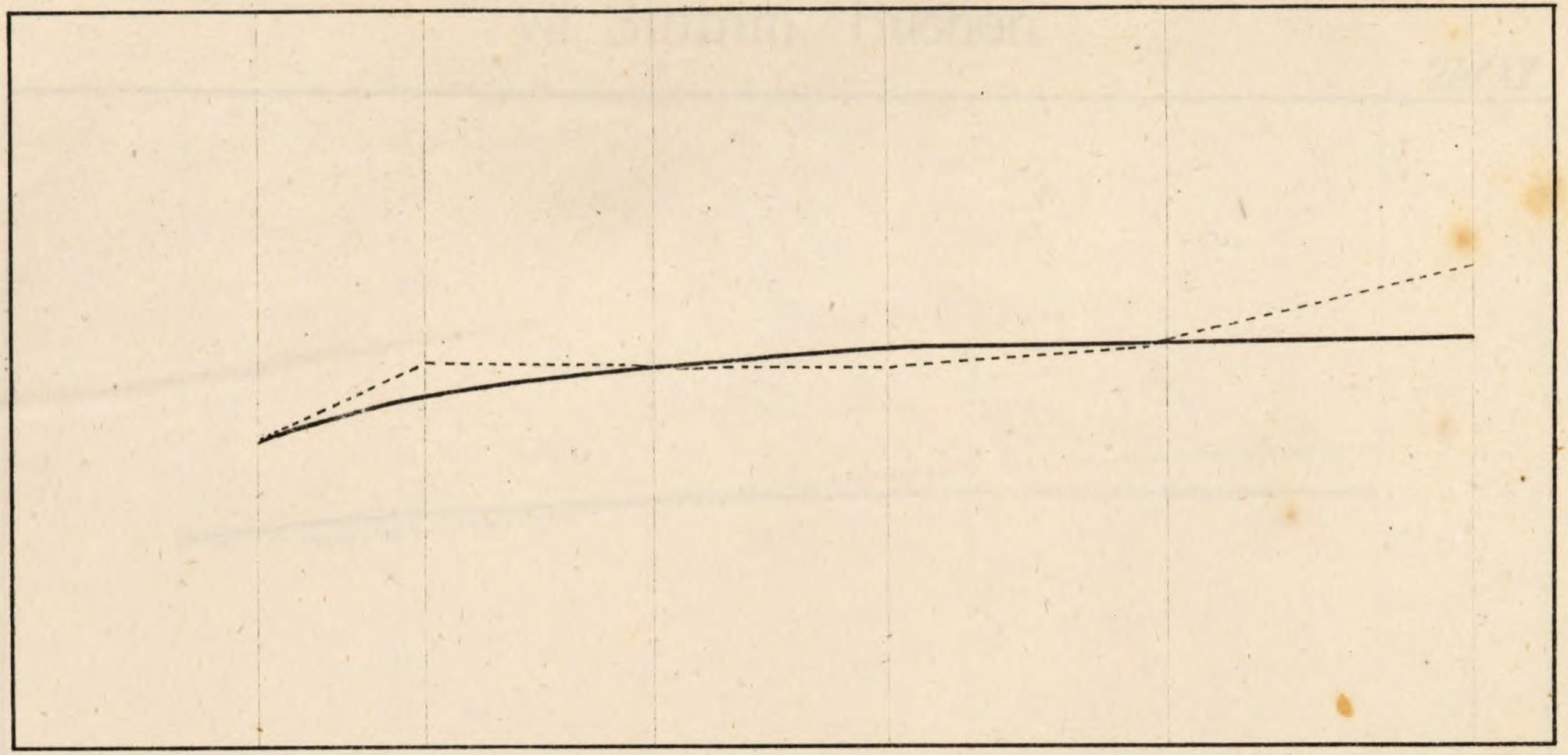
Taf. IX.

VI. Langenbruch. Fichten.

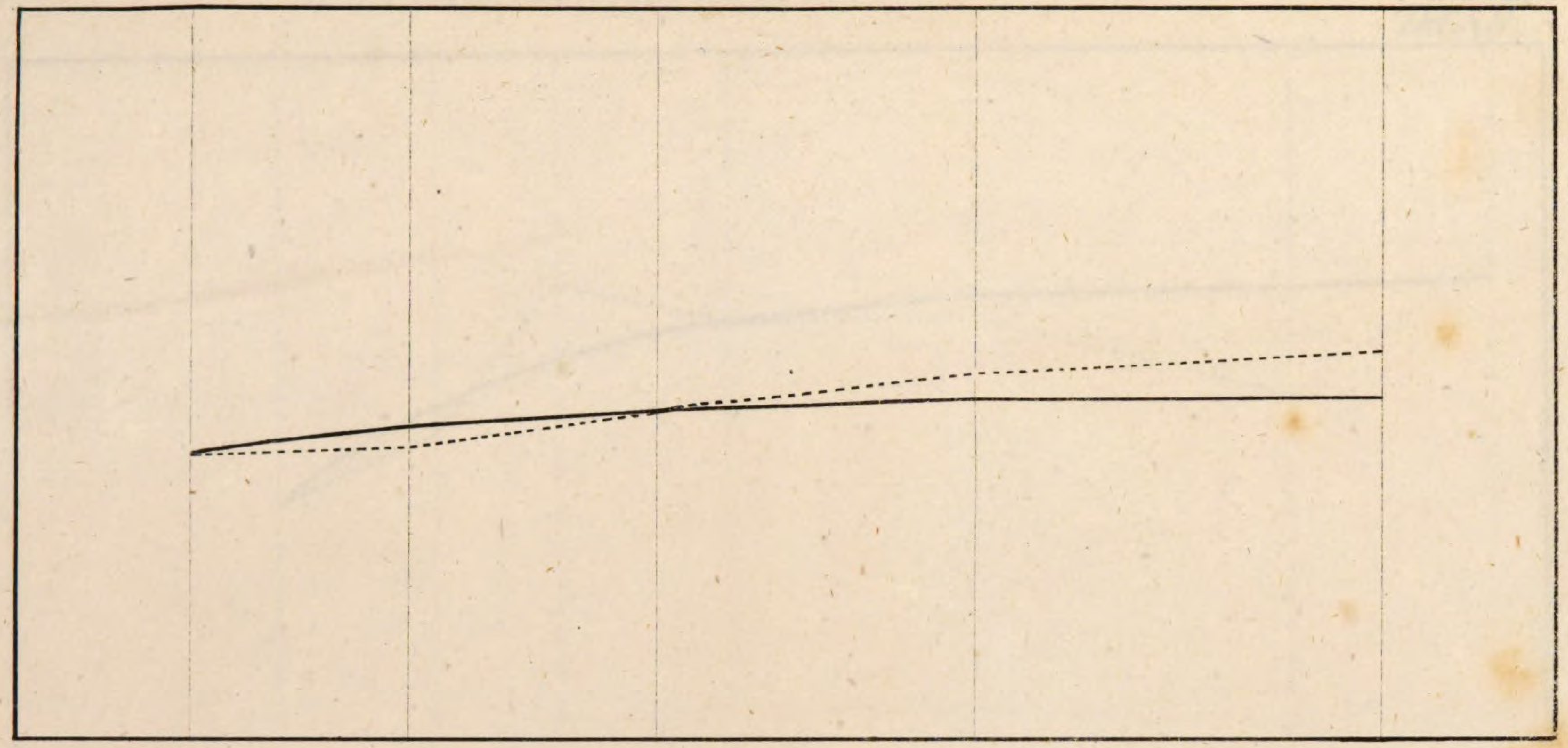


Taf. X.

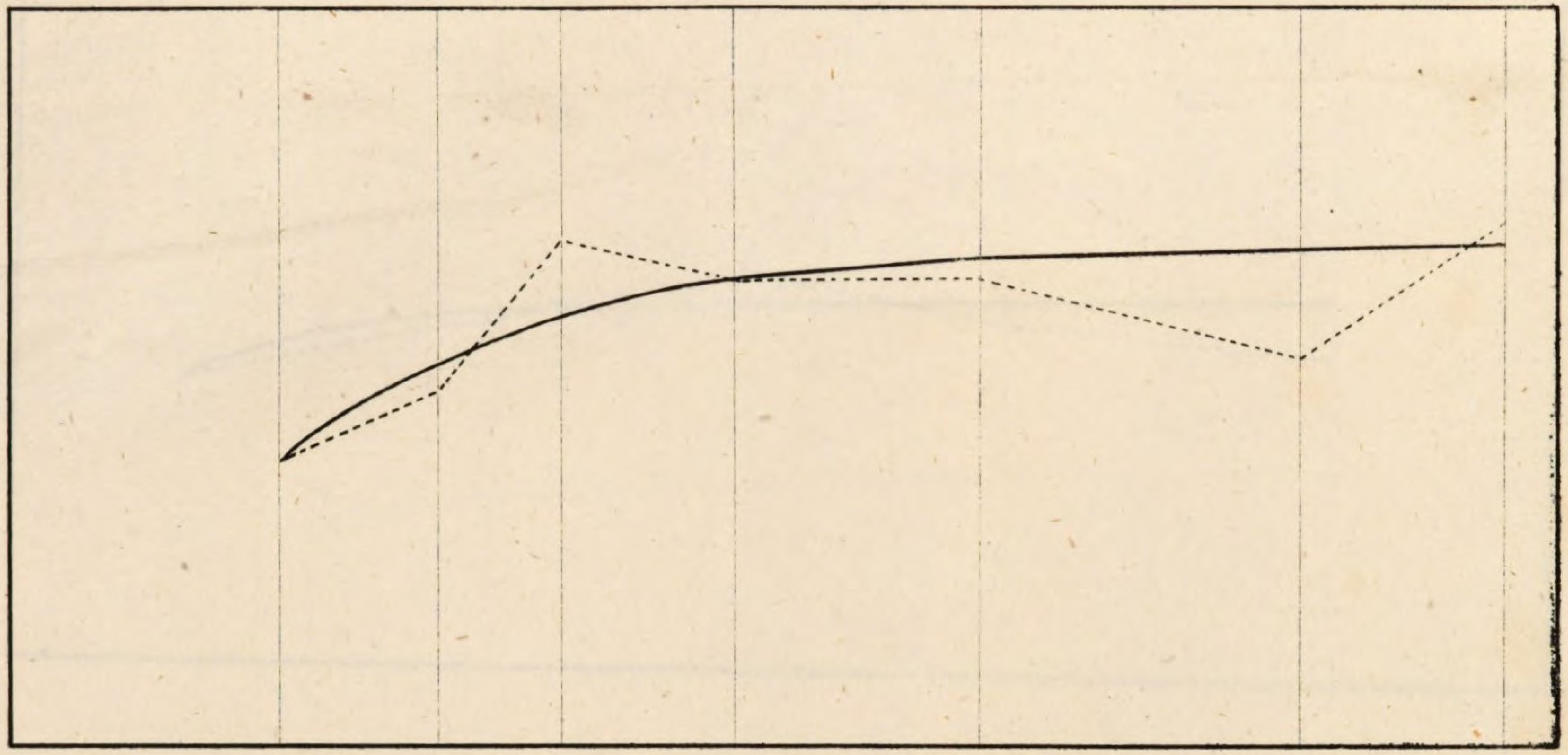
VII. Neuesgeheeg. Buchen.



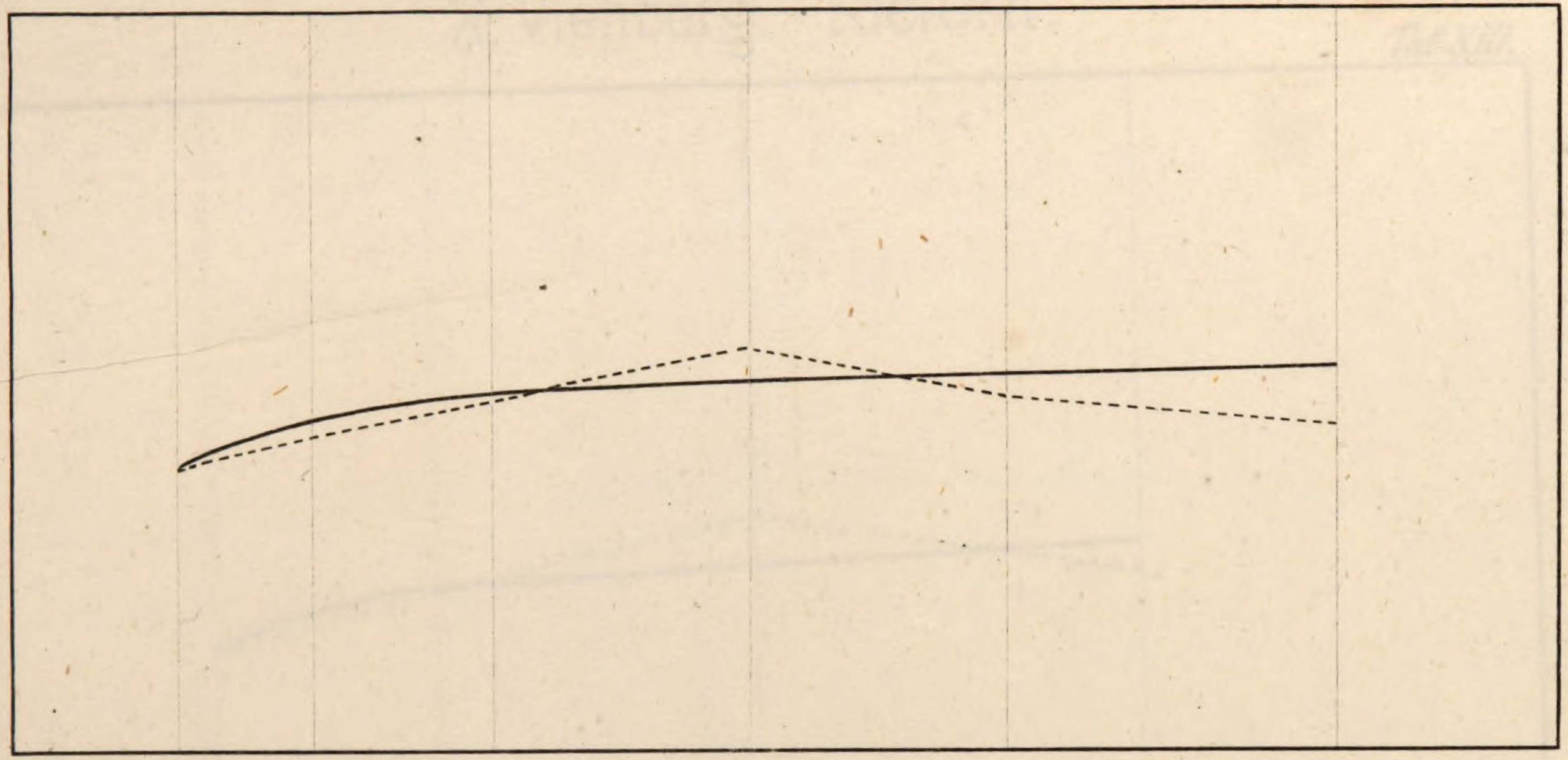
VIII. Stamm. Buchen.



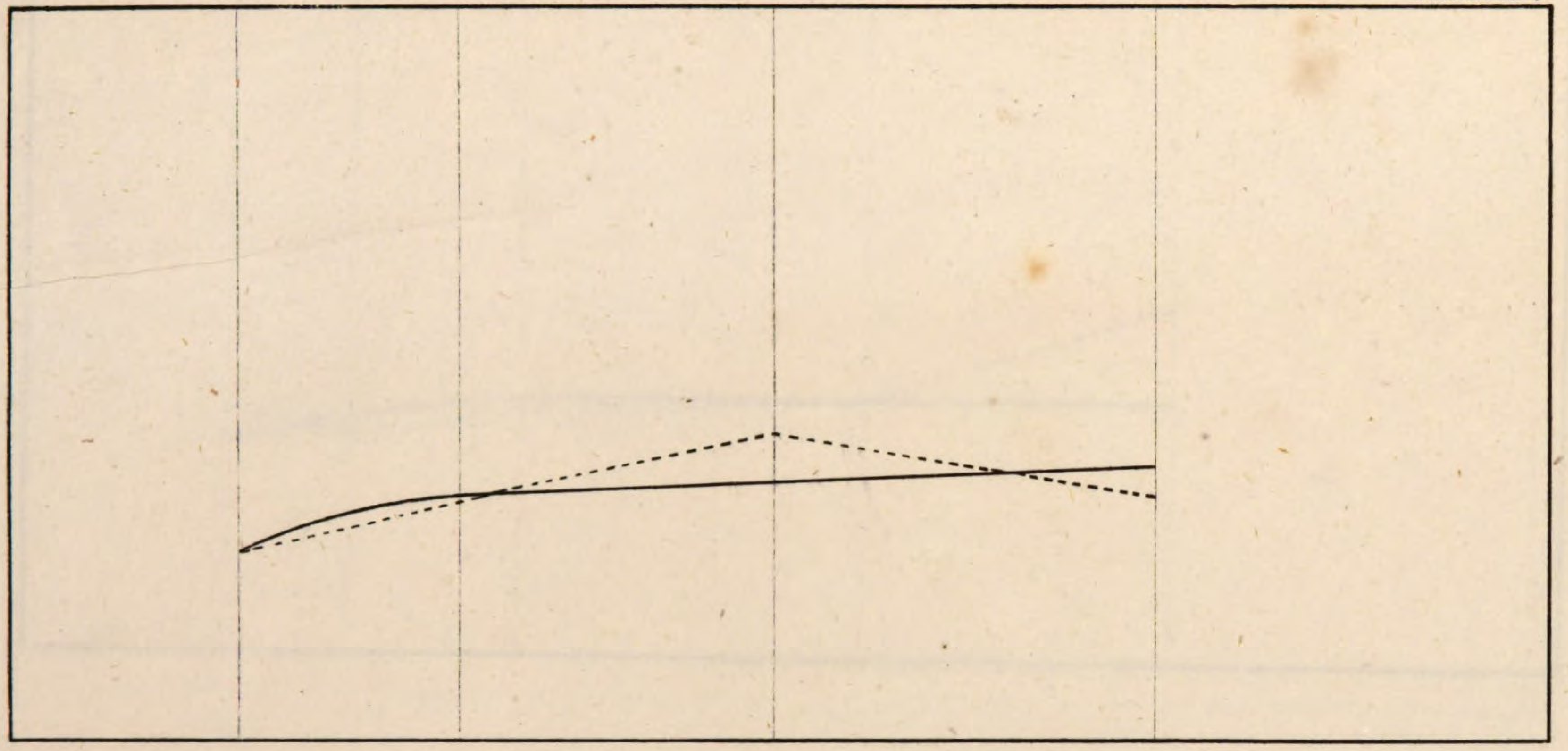
IX. Ammenhaeuserhecke. Buchen.



XI. Lemberg. Buchen.

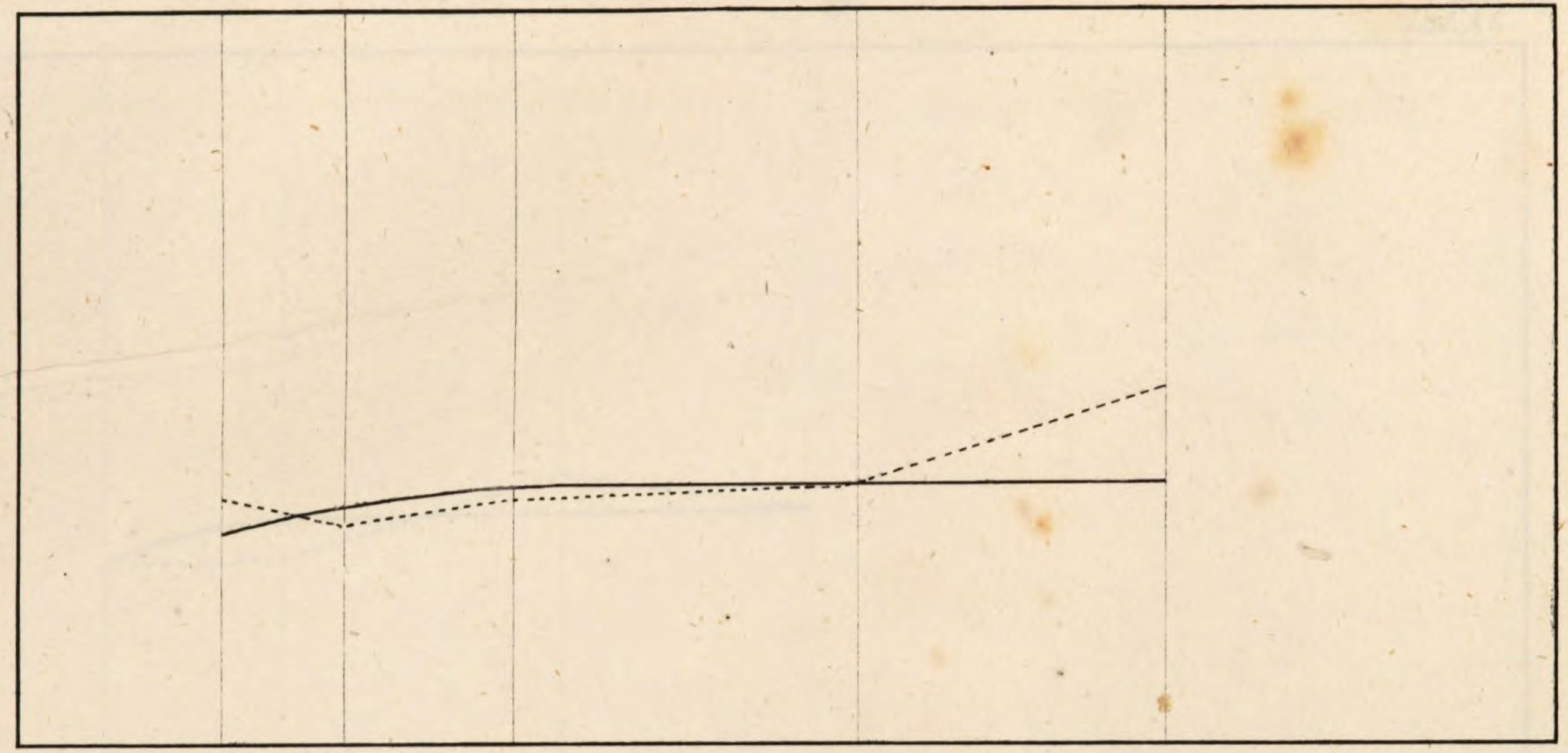


X. Viehberg. Kiefern.



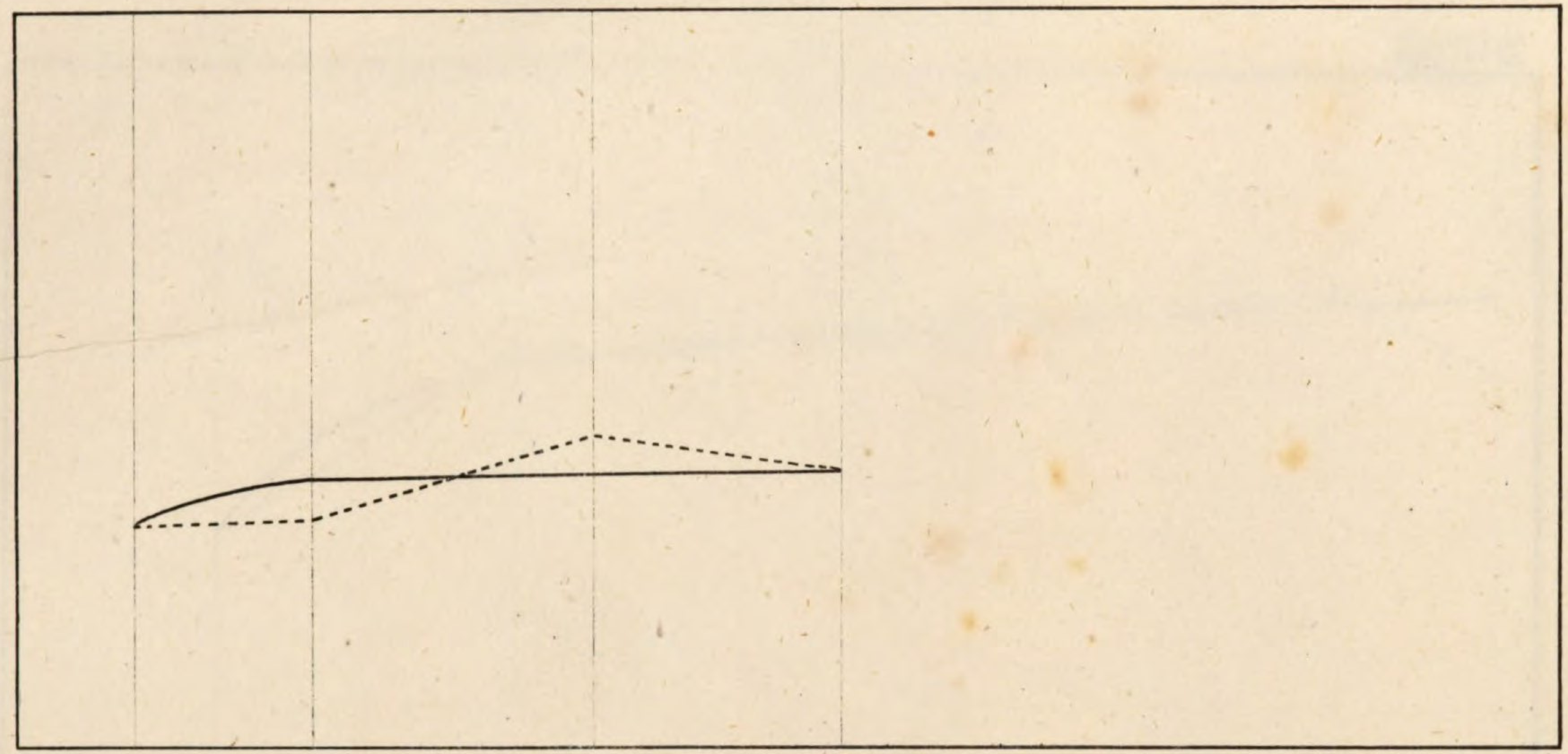
XIII. Hainstruth. Kiefern.

Taf. XVI.

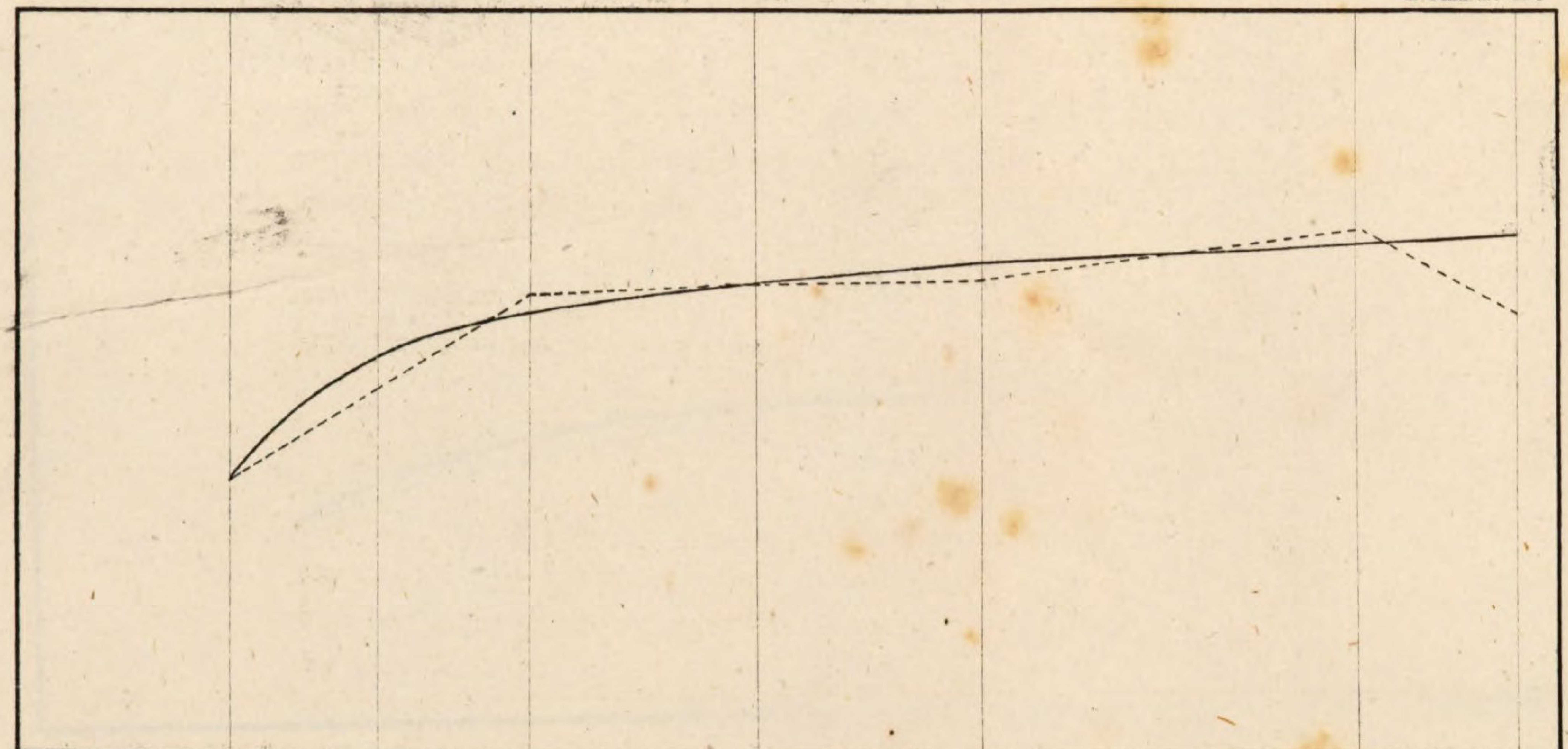


Taf. XV.

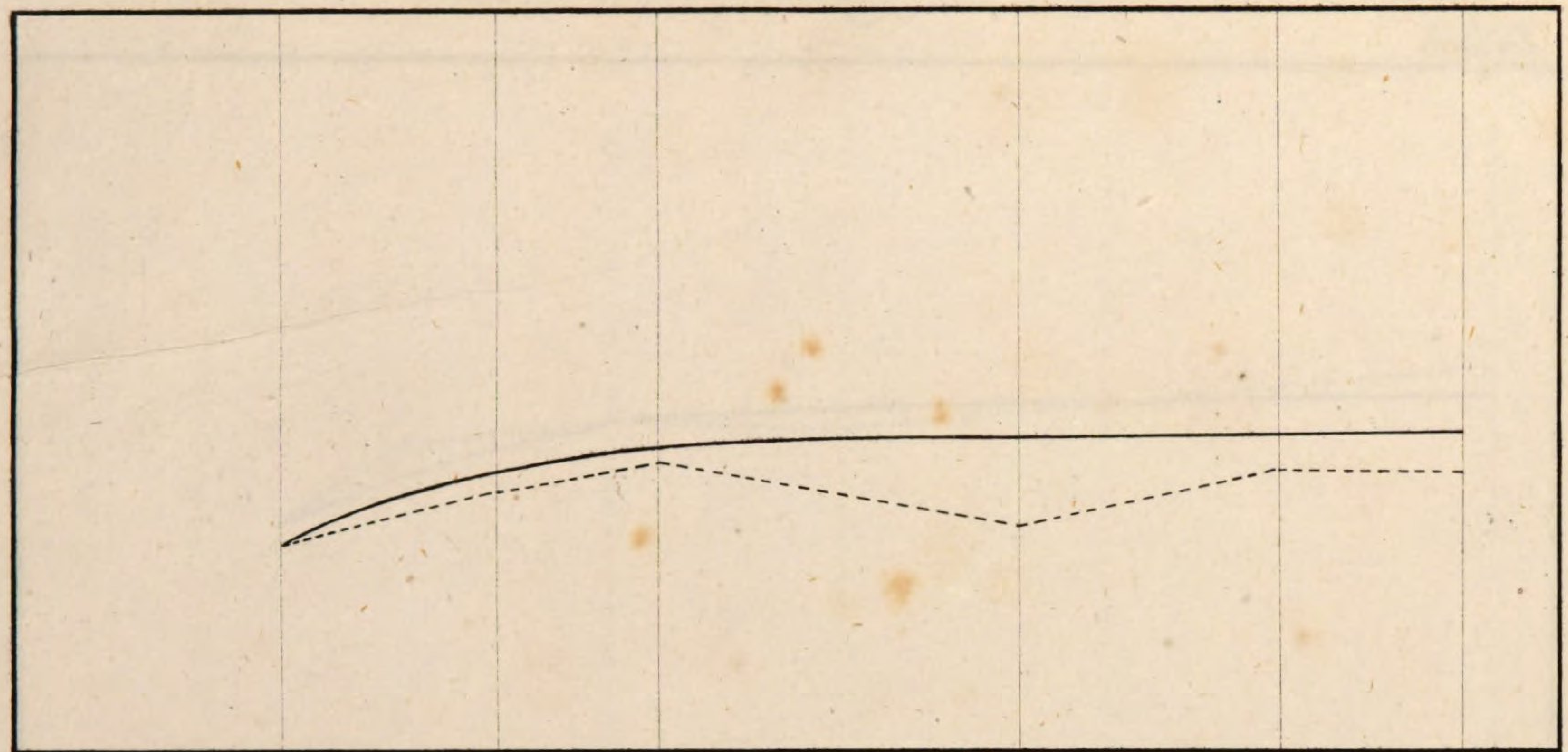
XII. Fraeuleinshang. Lärchen.



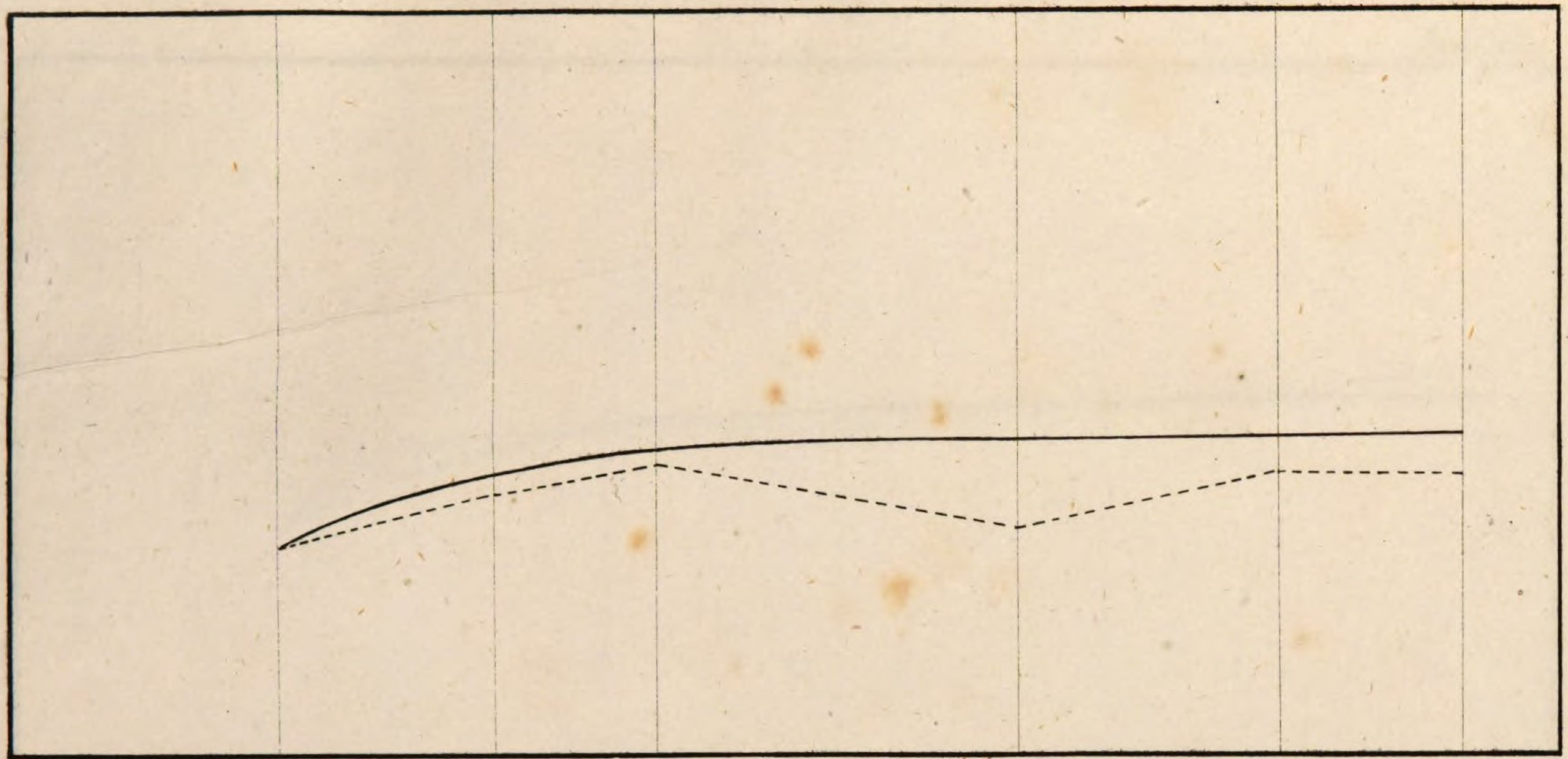
XIV. Eichwald. Buchen.



XV. Steinberg. Kiefern.

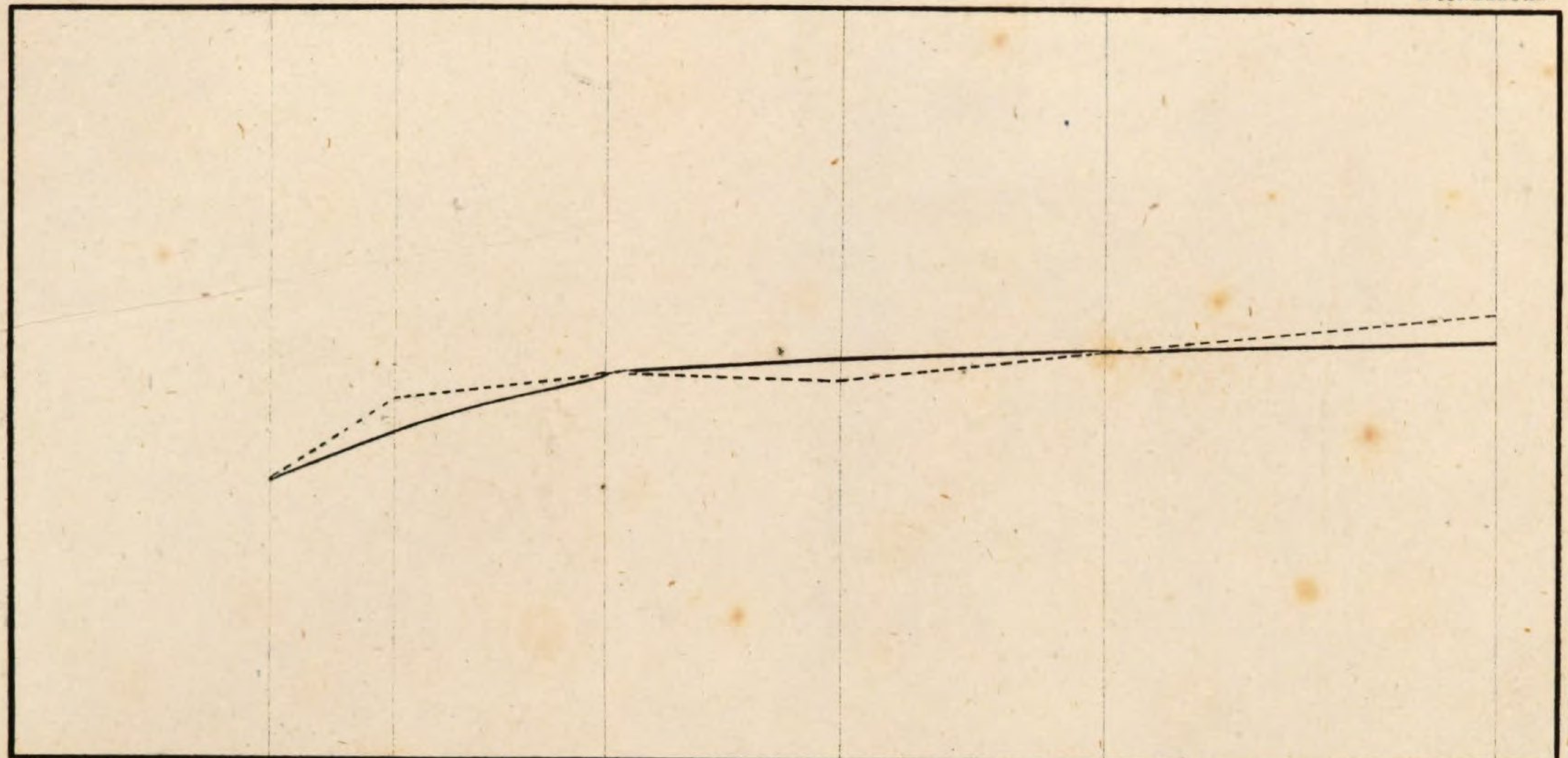


XV. Steinberg. Kiefern.



Taf. XIX.

XVI. Kirchgeheeg. Buchen.



Verbesserungen.

S. 25, Zeile 3 ist der Ausdruck $Y - c + \frac{G}{\frac{ag + a'g' + a''g'' + \dots}{a + a' + a'' + \dots} - c}$ in Accoladen einzuschließen.

S. 43, Zeile 20 statt „im vorigen Paragraphen“ lies „im §. 5.“

S. 63, Zeile 6 v. u. statt $\frac{\pi}{a + a' + a'' + \dots}$ lies $\frac{\pi}{(a + a' + a'' + \dots)^2}$

S. 64, Zeile 9 und 12 desgleichen.

S. 64, Zeile 11 statt $a'' r''$ lies $a'' a'''$

S. 64 ist die Zeile 13 mit einer Accolade zu schließen.

S. 72, Zeile 3 statt „die Querfläche“ lies „die elliptische Querfläche.“

S. 132, Zeile 9 statt „§. 30“ lies „§. 31.“